- **Escriba cédula y nombre en cada hoja.**
- **Numere cada una de las hojas.**
- **Escriba en un solo lado de la hoja.**
- **Empiece cada ejercicio en una nueva hoja.**
- **Indique el total de hojas entregadas en la primera.**

Ejercicio 1

Una mutualista médica desea organizar de una mejor manera la ubicación de sus ambulancias, preservando la calidad del servicio a los usuarios y aprovechando mejor los lugares disponibles de estacionamiento. Hay ambulancias de distinto tamaño según las prestaciones que pueden brindar (emergencia, traslado, visitas médicas a domicilio, etc.) y una cantidad determinada de lugares disponibles para el estacionamiento de las mismas. En cada lugar cabe al menos una ambulancia. Existe un costo por estacionar una ambulancia de un cierto tamaño en un lugar determinado.

Formular un modelo matemático para el problema de determinar qué ambulancia debe estacionarse en qué lugar de manera de minimizar el costo total de estacionamiento. Detallar las asunciones realizadas y los componentes del modelo (parámetros, variables de decisión, restricciones y función objetivo).

Aclaración: Lo que se brinda a continuación es un esbozo de lo que se considera una solución correcta, la cual no necesariamente es única.

Se asume que:

- Una ambulancia solo puede ir en un lugar.
- La cantidad de lugares de estacionamientos es suficiente para cubrir la totalidad de las ambulancias, es decir, no quedan ambulancias sin lugar.
- Los costos y la disponibilidad de los lugares no varían con el tiempo.
- Una ambulancia puede ir a cualquier lugar siempre y cuando haya espacio disponible.
- Se deben asignar todas las ambulancias a un lugar para asegurar un servicio adecuado.

Parámetros:

- A : cantidad de ambulancias.
- L : cantidad de lugares de estacionamiento.
- c_{ij} : costo de asignar la ambulancia i al lugar j, con $c_{ij} > 0$, $i = 1,\ldots,A$, $j = 1,\ldots,L$.
- R_i : espacio que necesita la ambulancia i, con $R_i > 0$, $i = 1,\ldots,A$.
- S_j : espacio total disponible del lugar j, con $S_j > 0$, $S_j \geq R_i$, $j = 1,\ldots,L$, $i = 1,\ldots,A$.

Variable de decisión:

- x_{ij}: 1 si a la ambulancia *i* se le asigna el lugar *j*, 0 de lo contrario, con *i* = 1,...,*A*, *j* = 1,...,*L*.

Modelo matemático:

$$\min \sum_{i=1}^{A} \sum_{j=1}^{L} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeto a :}$$

$$\sum_{j=1}^{L} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots, A$$

$$\sum_{i=1}^{A} R_i x_{ij} \leq S_j, \quad j = 1,\ldots, L$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots, A,\ j = 1,\ldots, L$$

La función objetivo es para minimizar el costo total de asignar la ambulancia *i* al lugar *j*. La primer restricción es para indicar que a cada ambulancia *i* se le asigna un único lugar *j.* Mediante la segunda restricción se indica que la cantidad de ambulancias estacionadas en un lugar *j* no puede superar el espacio disponible del lugar *j*. La tercera y última restricción es para indicar los valores posibles de la variable de decisión.

Ejercicio 2

Resuelva el siguiente problema de Programación Lineal mediante el algoritmo de Simplex Revisado.

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
&s.a. \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\
&\qquad x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 5 \\
&\qquad x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Comenzamos por escribir el problema en forma estándar, agregando variables de holgura:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad -3x_1 - x_2 - 2x_3 \\
&s.a. \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\
&\qquad x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 5 \\
&\qquad x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 8 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Las variables de holgura brindan una solución básica factible inicial: $x_B = (x_4, x_5, x_6)$. La matriz básica correspondiente (formada por las columnas de las variables básicas) y su inversa están dadas por $B = B^{-1} = I$.

Luego, calculamos los valores iniciales de:

- Los multiplicadores simplex: $\pi^T = c_B^T B^{-1} = (0,0,0)$
- El lado derecho transformado: $\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$
- El valor objetivo: $\bar{z} = c_B^T B^{-1} b = 0$

Iteración 1:

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$
\begin{aligned}
\overline{c_1} &= c_1 - \pi^T a_1 = -3 - (0,0,0)(2,1,1)^T = -3 \\
\overline{c_2} &= c_2 - \pi^T a_2 = -1 - (0,0,0)(2,3,1)^T = -1 \\
\overline{c_3} &= c_3 - \pi^T a_3 = -2 - (0,0,0)(1,-1,3)^T = -2
\end{aligned}
$$

Ya que todos los costos reducidos son negativos podemos tomar cualquiera de las variables para entrar a la base. Elegimos la variable no básica x_1.

La columna correspondiente a x_1 expresada en la base actual es $\overline{a_1} = B^{-1}a_1 = (2,1,1)^T$ y el tableau de Simplex Revisado nos queda de la siguiente manera:

2	6	1	0	0
1	5	0	1	0
1	8	0	0	1
-3	0	0	0	0

La variable saliente es x_4 y el tableau luego del pivoteo queda:

1	3	1/2	0	0
0	2	-1/2	1	0
0	5	-1/2	0	1
0	9	3/2	0	0

La nueva variable básica es $x_B = (x_1, x_5, x_6)$ con un valor objetivo $z = -9$.

Iteración 2:

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$\overline{c_2} = c_2 - \pi^T a_2 = -1 - (-3/2,0,0)(2,3,1)^T = 2$$
$$\overline{c_3} = c_3 - \pi^T a_3 = -2 - (-3/2,0,0)(1,-1,3)^T = -1/2$$
$$\overline{c_4} = c_4 - \pi^T a_4 = 0 - (-3/2,0,0)(1,0,0)^T = 3/2$$

Ingresa la variable no básica x_3 a la base.

La columna correspondiente a x_3 expresada en la base actual es $\overline{a_3} = B^{-1}a_3 = (1/2, -3/2, 5/2)^T$ y el tableau de Simplex Revisado nos queda de la siguiente manera:

1/2	3	1/2	0	0
-3/2	2	-1/2	1	0
5/2	5	-1/2	0	1
-1/2	9	3/2	0	0

La variable saliente es x_6 y el tableau luego del pivoteo queda:

0	2	3/5	0	-1/5
0	5	-4/5	1	3/5
1	2	-1/5	0	2/5
0	10	7/5	0	1/5

La nueva variable básica es $x_B = (x_1, x_5, x_3)$ con un valor objetivo $z = -10$.

Iteración 3:

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$\overline{c_2} = c_2 - \pi^T a_2 = -1 - \left(\frac{-7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right)(2,3,1)^T = 2$$
$$\overline{c_4} = c_4 - \pi^T a_4 = 0 - \left(\frac{-7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right)(1,0,0)^T = 7/5$$
$$\overline{c_6} = c_6 - \pi^T a_6 = 0 - \left(\frac{-7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right)(0,0,1)^T = 1/5$$

Ninguna de las variables no básicas tiene costo reducido negativo, por lo tanto la solución actual es óptima.

Por lo tanto la solución óptima del problema original es $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 2$ y el valor óptimo es $z = 10$.

Ejercicio 3

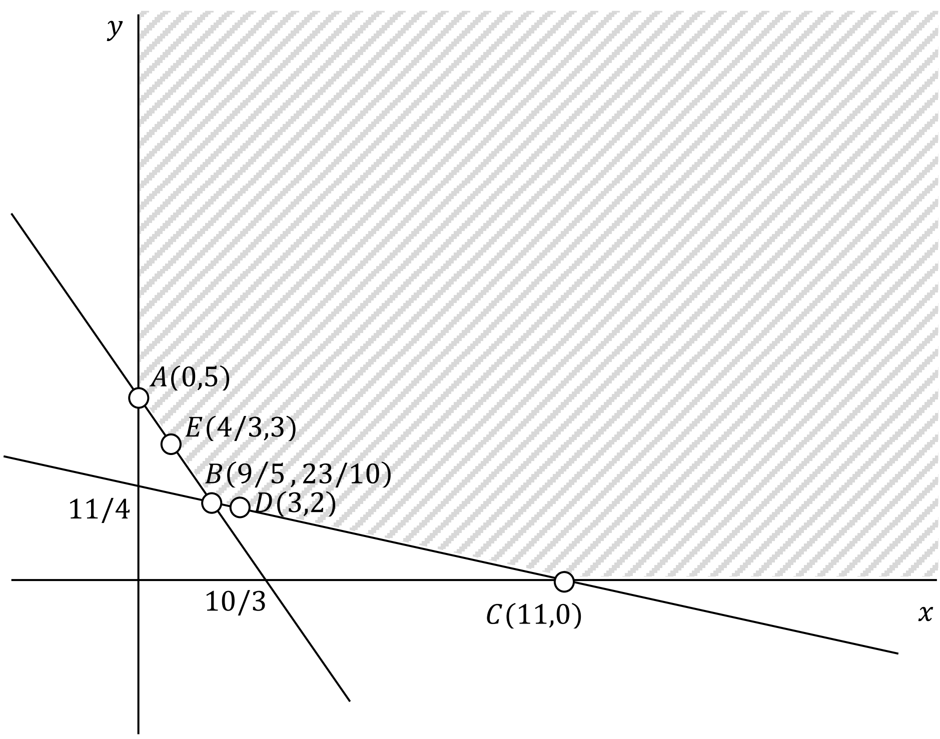
Solucionar el siguiente problema de Programación Entera con el método *Branch & Bound*. Dibujar la región factible, solucionar los subproblemas lineales en forma gráfica y dibujar el árbol que se genera.

$$\begin{array}{ll} \min & z = x + 2y \\ s.a. & \\ & 3x + 2y \geq 10 \\ & x + 4y \geq 11 \\ & x, y \geq 0 \text{ y enteras} \end{array}$$

Comenzamos por escribir el problema de programación lineal $P0_L$ que se obtiene de relajar el problema entero original $P0$, quitando la restricción de integridad sobre las variables.

$$P0_L \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = x + 2y \\ s.a. & \\ & 3x + 2y \geq 10 \\ & x + 4y \geq 11 \\ & x, y \geq 0 \end{array} \right.$$

Dibujamos la región factible del problema:



De la región factible correspondiente a $P0_L$, tenemos que la solución óptima se da en el punto $B = \left(\frac{9}{5}, \frac{23}{10}\right)$ con valor óptimo $z = \frac{32}{5}$. Cómo la solución óptima no es entera, ramificamos en una de las variables continuas. Ramificamos en $y \leq 2$ y $y \geq 3$, obteniendo los subproblemas $P1$ y $P2$ siguientes:

$$P1 \begin{cases} \min \quad z = x + 2y \\ s.a. \\ \qquad 3x + 2y \geq 10 \\ \qquad x + 4y \geq 11 \\ \qquad y \leq 2 \\ \qquad x, y \geq 0 \ \ enteras \end{cases} \qquad P2 \begin{cases} \min \quad z = x + 2y \\ s.a. \\ \qquad 3x + 2y \geq 10 \\ \qquad x + 4y \geq 11 \\ \qquad y \geq 3 \\ \qquad x, y \geq 0 \ \ enteras \end{cases}$$

1. Si relajamos $P1$ obtenemos un problema de programación lineal $P1_L$ que tiene solución óptima en el punto $D = (3,2)$ con $z = 7$. La solución es entera y por lo tanto solución óptima de $P1$ y el problema está vacío.

2. Si relajamos $P2$ obtenemos un problema de programación lineal $P2_L$ que tiene solución óptima en el punto $E = (4/3,3)$ con $z = 22/3 \geq 7$. Como la solución tiene valor mayor que la mejor solución entera conocida, el problema $P2$ está vacío.

Todos los problemas generados están vacíos y por lo tanto el problema original solucionado. La solución óptima es $x = 3$, $y = 2$ con valor óptimo $z = 7$. El árbol de búsqueda generado es el siguiente: