- **Escriba cédula y nombre en cada hoja.**
- **Numere cada una de las hojas.**
- **Escriba en un solo lado de la hoja.**
- **Empiece cada ejercicio en una nueva hoja.**
- **Indique el total de hojas entregadas en la primera.**

Ejercicio 1

Una empresa que se dedica a la fabricación y venta de vinos finos en el país está pensando en sacar al mercado una línea de vino rosado, para complementar sus otras dos líneas de vinos tinto y blanco. Para determinar el volumen a producir, desea recurrir a la creación de un modelo cuantitativo.

a) Describir que datos habría que relevar y tener en cuenta para el modelo.
b) Definir en palabras la función objetivo, las variables de decisión y las restricciones que habría que considerar para un posible modelo.
c) Formular un modelo matemático que se corresponda con lo contestado en el punto anterior, detallando las asunciones impuestas.

Aclaración: Lo que se brinda a continuación es un esbozo que sirve para ilustrar lo que se considera una posible solución correcta, ya que puede existir más de una.

a) Costos de producción (considerando el cultivo, recolección, selección, procesamiento, embotellado, marketing, distribución, etc.); estimación de la demanda (teniendo en cuenta los volúmenes vendidos de vino rosado otros años por otras marcas, encuestas sobre preferencias de tipos de vino, etc.); capacidad de producción y de almacenamiento (actual y con posible expansión), precio de venta (investigar y analizar valores en el mercado); recursos humanos (selección y capacitación).

b) Una posibles función objetivo sería la de minimizar el costo de producción y distribución anual, asumiendo que la demanda es conocida para cada uno de los meses del año (escenario determinista).

   La variable de decisión sería la cantidad de vino rosado a entregar por mes para satisfacer la demanda. Esto ya me determinaría la cantidad de uva a cultivar y procesar por año.

   Las restricciones serían para no producir más de lo permitido por la capacidad fijada y satisfacer la demanda de cada mes en tiempo (no se permiten faltantes). También se tendría que tener en cuenta que el volumen de vino embotellado en stock no supere la capacidad máxima del mismo. Ya que se espera vender todo lo producido en el mismo año, no se consideran restricciones de perecimiento del vino ni de las uvas. Tampoco el almacenamiento de las uvas, ni el rendimiento de las mismas para la producción.

c)

$$
\begin{aligned}
&\min \; f\Big(\sum_{i=1}^{12} x_i\Big) + g_t(x_t) \\
&\text{sujeto a :} \\
&\sum_{i=1}^{t} x_i \geq \sum_{i=1}^{t} D_i, \quad \forall t = 1,\ldots,12 \\
&\sum_{i=1}^{12} x_i \leq C^p \\
&\sum_{i=1}^{t} x_i - D_i \leq C^s, \quad \forall t = 1,\ldots,12 \\
&x_t \geq 0, \quad \forall t = 1,\ldots,12
\end{aligned}
$$

En donde $f()$ es el costo de producción anual y $g_t()$ el costo de distribución mensual. Se asume que la distribución se hace una sola vez, al comienzo del mes, y a todos los clientes. Los tiempos de entrega se asumen instantáneos. Se asume que los costos de almacenamiento del vino es cero.

La primera restricción es para indicar que la cantidad a entregar en cada mes, x_t, debe ser los suficiente para satisfacer la demanda a tiempo de cada mes, sin que ocurran faltantes.

La segunda restricción es para indicar que la cantidad a producir (que es igual al total a entregar) no debe superar la capacidad de producción C^p.

La tercera restricción es para no almacenar más vino del permitido, dado por la constante C^s.

Finalmente, la cuarta restricción es para definir los posibles valores de las variables.

Ejercicio 2

Resuelva el siguiente problema de Programación Lineal mediante el algoritmo de Simplex Revisado.

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\
s.a. & \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 5 \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Comenzamos por escribir el problema en forma estándar, agregando variables de holgura:

$$
\begin{array}{ll}
\min & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\
s.a. & \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

Las variables de holgura brindan una solución básica factible inicial: $x_B = (x_4, x_5, x_6)$. La matriz básica correspondiente (formada por las columnas de las variables básicas) y su inversa están dadas por $B = B^{-1} = I$.

Luego, calculamos los valores iniciales de:

- Los multiplicadores simplex: $\pi^T = c_B^T B^{-1} = (0,0,0)$
- El lado derecho transformado: $\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
- El valor objetivo: $\bar{z} = c_B^T B^{-1} b = 0$

<u>Iteración 1:</u>

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$
\begin{aligned}
\overline{c_1} &= c_1 - \pi^T a_1 = -3 - (0,0,0)(2,1,3)^T = -3 \\
\overline{c_2} &= c_2 - \pi^T a_2 = -1 - (0,0,0)(1,-2,1)^T = -1 \\
\overline{c_3} &= c_3 - \pi^T a_3 = -3 - (0,0,0)(3,1,1)^T = -3
\end{aligned}
$$

Ya que todos los costos reducidos son negativos podemos tomar cualquiera de las variables para entrar a la base. Elegimos la variable no básica x_1.

La columna correspondiente a x_1 expresada en la base actual es $\overline{a_1} = B^{-1}a_1 = (2,1,3)^T$ y el tableau de Simplex Revisado nos queda de la siguiente manera:

2	6	1	0	0
1	5	0	1	0
3	6	0	0	1
-3	0	0	0	0

La variable saliente es x_6 y el tableau luego del pivoteo queda:

0	2	1	0	-2/3
0	3	0	1	-1/3
1	2	0	0	1/3
0	6	0	0	1

La nueva variable básica es $x_B = (x_4, x_5, x_1)$ con un valor objetivo $z = -6$.

<u>Iteración 2:</u>

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$\overline{c_2} = c_2 - \pi^T a_2 = -1 - (0,0,-1)(1,-2,1)^T = 0$$
$$\overline{c_3} = c_3 - \pi^T a_3 = -3 - (0,0,-1)(3,1,1)^T = -2$$
$$\overline{c_6} = c_6 - \pi^T a_6 = 0 - (0,0,-1)(0,0,1)^T = 1$$

Ingresa la variable no básica x_3 para entrar a la base.

La columna correspondiente a x_3 expresada en la base actual es $\overline{a_3} = B^{-1}a_3 = (7/3, 2/3, 1/3)^T$ y el tableau de Simplex Revisado nos queda de la siguiente manera:

7/3	2	1	0	-2/3
2/3	3	0	1	-1/3
1/3	2	0	0	1/3
-2	6	0	0	1

La variable saliente es x_4 y el tableau luego del pivoteo queda:

1	6/7	3/7	0	-2/7
0	17/7	-2/7	1	-1/7
0	12/7	-1/7	0	3/7
0	54/7	6/7	0	3/7

La nueva variable básica es $x_B = (x_3, x_5, x_1)$ con un valor objetivo $z = -54/7$.

<u>Iteración 3:</u>

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$\overline{c_2} = c_2 - \pi^T a_2 = -1 - \left(\frac{-6}{7}, 0, \frac{-3}{7}\right)(1,-2,1)^T = 2/7$$
$$\overline{c_4} = c_4 - \pi^T a_4 = 0 - \left(\frac{-6}{7}, 0, \frac{-3}{7}\right)(1,0,0)^T = 6/7$$
$$\overline{c_6} = c_6 - \pi^T a_6 = 0 - \left(\frac{-6}{7}, 0, \frac{-3}{7}\right)(0,0,1)^T = 3/7$$

Ninguna de las variables no básicas tiene costo reducido negativo, por lo tanto la solución actual es óptima.

Por lo tanto la solución óptima del problema original es $x_1 = \frac{12}{7}, x_2 = 0, x_3 = \frac{6}{7}$ y el valor óptimo es $z = 54/7$.

Ejercicio 3

a) Solucionar el siguiente problema de Programación Entera con el método *Branch & Bound*. Dibujar la región factible, solucionar los subproblemas lineales en forma gráfica y dibujar el árbol que se genera.

$$\begin{aligned} &\min \quad z = 3x + 2y \\ &s.a. \\ &\qquad x + \tfrac{1}{2}y \geq 2 \\ &\qquad x + 2y \geq 4 \\ &\qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

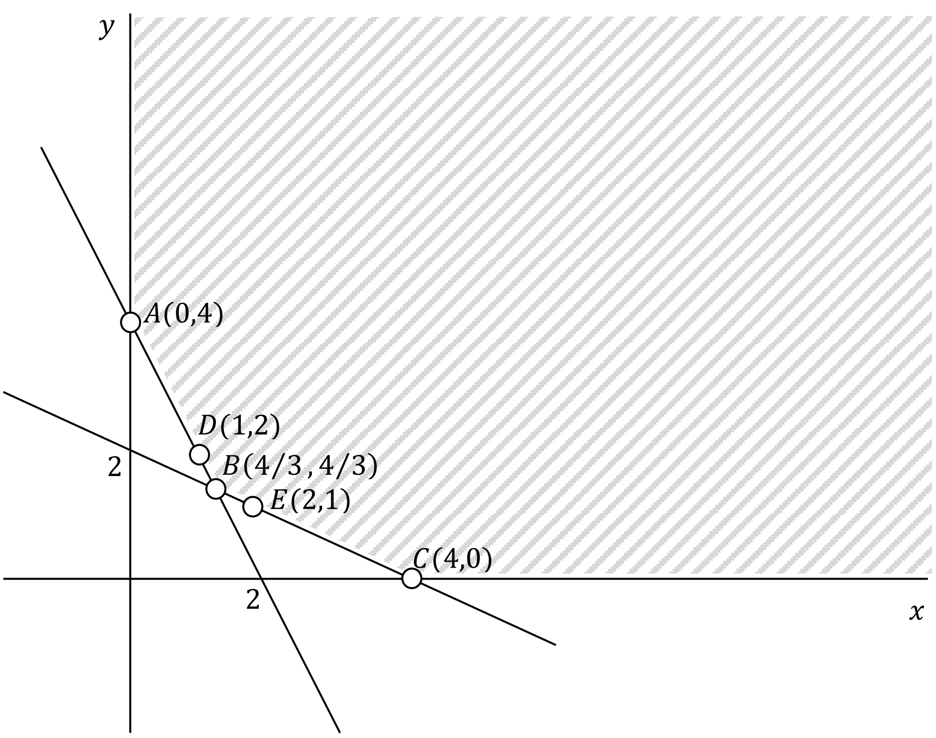
b) Mencionar los posibles criterios de vaciamiento del método *Branch & Bound.*

Parte a:

Comenzamos por escribir el problema de programación lineal $P0_L$ que se obtiene de relajar el problema entero original $P0$, quitando la restricción de integridad sobre las variables.

$$P0_L \begin{cases} \min \quad z = 3x + 2y \\ s.a. \\ \qquad x + \tfrac{1}{2}y \geq 2 \\ \qquad x + 2y \geq 4 \\ \qquad x, y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible del problema:

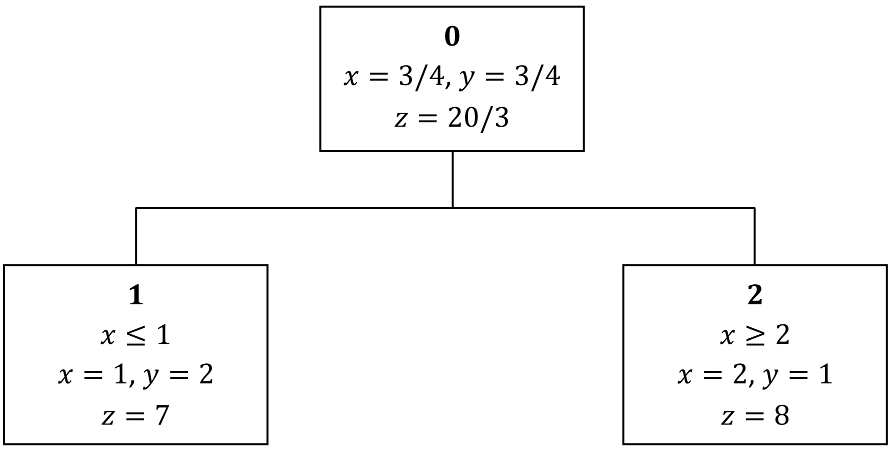


De la región factible correspondiente a $P0_L$, tenemos que la solución óptima se da en el punto $B = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ con valor óptimo $z = \frac{20}{3}$. Cómo la solución óptima no es entera, ramificamos en una de las variables continuas. Ramificamos en $x \leq 1$ y $x \geq 2$, obteniendo los subproblemas $P1$ y $P2$ siguientes:

$$P1 \begin{cases} \min \quad z = 3x + 2y \\ s.a. \\ \qquad x + \frac{1}{2}y \geq 2 \\ \qquad x + 2y \geq 4 \\ \qquad x \leq 1 \\ \qquad x, y \geq 0 \;\; enteras \end{cases} \qquad P2 \begin{cases} \min \quad z = 3x + 2y \\ s.a. \\ \qquad x + \frac{1}{2}y \geq 2 \\ \qquad x + 2y \geq 4 \\ \qquad x \geq 2 \\ \qquad x, y \geq 0 \;\; enteras \end{cases}$$

1. Si relajamos $P1$ obtenemos un problema de programación lineal $P1_L$ que tiene solución óptima en el punto $D = (1,2)$ con $z = 7$. La solución es entera y por lo tanto solución óptima de $P1$ y el problema está vacío.
2. Si relajamos $P2$ obtenemos un problema de programación lineal $P2_L$ que tiene solución óptima en el punto $E = (2,1)$ con $z = 8$. La solución es entera y por lo tanto solución óptima de $P2$ y el problema está vacío.

Todos los problemas generados están vacíos y por lo tanto el problema original solucionado. La solución óptima es $x = 1$, $y = 2$ con valor óptimo $z = 7$. El árbol de búsqueda generado es el siguiente:



Parte b:

Ver material teórico.