Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Curso anual 2017**

Solución del Tercer parcial

(I) VERDADERO/FALSO. Total: 3 puntos

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique la respuesta.

Afirmación 1: El plano $x - y + 2z - 2 = 0$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

> Falsa.
> Para que el plano sea un subespacio de $\mathbb{R}^3$ debe contener al $(0,0,0)$ y en este caso $(0,0,0)$ no verifica la ecuación del plano.

Afirmación 2: Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente.

> Verdadera.
> Como el conjunto $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ es un generador de $\mathbb{R}_2[x]$ y la cantidad de elementos de A coincide con la dimensión de $\mathbb{R}_2[x]$ que es tres, entonces por teorema visto en clase A es también linealmente independiente.

Afirmación 3: Existen subespacios del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ de dimensión 3.

> Verdadera
> La dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ es 4 por lo tanto tiene subespacios de dimensión 3. Basta considerar el subespacio generado por 3 vectores linealmente independientes. Por ejemplo: $S =< (1,0), (0,1), (i,0) >$.

(II) DESARROLLO. Total: 23 puntos

Ejercicio 1: (6 puntos)

Considere $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices 2×2 con coeficientes reales y el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : a = d = 0 \right\} \subset V.$$

a) Pruebe que S es un subespacio de V.
b) Halle una base de S y deduzca la dimensión de S.
c) Halle un generador de S que no sea base.

Solución:

a) Las matrices de S son de la forma $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ con $b, c \in \mathbb{R}$.

- Es claro que la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$.
- Dadas dos matrices $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & b' \\ c' & 0 \end{pmatrix}$ de S resulta que su suma
$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b' \\ c' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+b' \\ c+c' & 0 \end{pmatrix} \in S$$
- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda b \\ \lambda c & 0 \end{pmatrix} \in S$.

  Entonces podemos concluir que S es un subespacio.

b) Como $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ para todo $b, c \in \mathbb{R}$ resulta que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un generador de S y como además es L.I resulta ser una base de S y por lo tanto $\dim S = 2$.

c) Para hallar un generador de S que no sea base alcanza con agregarle a la base hallada una matriz que sea combinación lineal de ellas, por ejemplo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Luego el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un generador de S que no es base.

Ejercicio 2: (6 puntos)

Considere $V = \mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales y

$$\mathcal{A} = \{x^3 + x \quad , \quad 2x^3 + 2x + 2 \quad , \quad x^2 - 1 \quad , \quad -x^2 + 2 \quad , \quad 2 \quad \} \subset V$$

Sea S el subespacio de V generado por el conjunto $\mathcal{A}$.

a) Halle una base de S.

b) Halle explícitamente la o las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c, d de un polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que $p \in S$.

Solución:

a) Los polinomios 2 y $-x^2 + 2$ son combinación lineal de los restantes polinomios pues: $2 = -2(x^3 + x) + (2x^3 + 2x + 2)$ y $-x^2 + 2 = -1(x^3 + x) + \dfrac{1}{2}(2x^3 + 2x + 2) - 1(x^2 - 1)$. Entonces el conjunto $\{x^3 + x, 2x^3 + 2x + 2, x^2 - 1\}$ genera a S y además se prueba fácilmente que es L.I, por lo que será una base de S.

b) Si queremos hallar la o las condiciones que debe cumplir un polinomio $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ para que $p \in S$ debemos hallar la o las condiciones para que el sistema

$$\lambda_1(x^3 + x) + \lambda_2(2x^3 + 2x + 2) + \lambda_3(x^2 - 1) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sea compatible. Esta igualdad nos lleva a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & a \\ & & & & \lambda_3 & = & b \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & c \\ & & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & d \end{array}\right.$$

Este sistema resulta compatible si y sólo si $a = c$. Por lo tanto esta es la única condición que debe cumplir un polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que $p \in S$.

Ejercicio 3: (6 puntos)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$.

a) Escriba la definición de que el conjunto B sea linealmente independiente.

b) Escriba la definición del subespacio generado por v_1, v_2 denotado por $< v_1, v_2 >$.

c) Pruebe que: si $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente y v_3 no pertenece al subespacio generado por v_1 y v_2, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente.

d) Asumiendo que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente ¿ Qué condición debe cumplir el espacio V para que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ sea base de V ?

Solución:

a,b) Ver teórico.

c) El conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente si la única solución de la ecuación $\vec{O} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ es $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Si $\lambda_3 \neq 0$ podemos despejar a v_3 de la ecuación anterior y obtener $v_3 = \frac{\lambda_1}{-\lambda_3} v_1 + \frac{\lambda_2}{-\lambda_3} v_2$. Entonces v_3 sería combinación lineal de v_1 y v_2 lo cual es absurdo porque $v_3 \notin < v_1, v_2 >$. Por lo tanto $\lambda_3 = 0$. Sustituyendo en la ecuación original nos queda $\overrightarrow{O} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Ahora usando que el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente obtenemos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

d) La condición que debe cumplir V es que la dimV = 3, pues entonces todo conjunto L.I con 3 vectores es base.

Ejercicio 4: (5 puntos)

Considere $\mathbb{R}^4$ y los subespacios

$$S_1 = \{(x, y, z, t) : x - y = 0, \quad z - t = 0\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{(x, y, z, t) : x - z = 0, \quad y = 0\}$$

a) Halle $S_1 + S_2$.

b) ¿Es $S_1 + S_2$ una suma directa? Justifique su respuesta.

Solución:

a) Como $S_1 = \{(x, x, z, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ una base de S_1 es $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ y como $S_2 = \{(x, 0, x, t) : x, t \in \mathbb{R}\}$ una base de S_2 es $\{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
Luego $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es un generador de $S_1 + S_2$ y además se chequea fácilmente que este conjunto es linealmnete independiente y por lo tanto es una base de $S_1 + S_2$. Entonces $\dim S_1 + S_2 = 4$ y como $S_1 + S_2 \subset \mathbb{R}^4$ se deduce que $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^4$.

b) La suma de $S_1 + S_2$ es directa pues ya vimos que la unión da las bases de los subespacios es base de la suma. También es fácil ver que $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$.