Sistemas Lineales 2 - Segundo Parcial 2003

13 de diciembre de 2003

Solución del Problema 3

1. Parte a)

1.1. i)

Sea V_1 el voltaje a la salida del primer operacional, identificando a ambos operacionales en una configuración inversora, deducimos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{V_1(s)}{V_i(s)} = -\frac{L_1 s + R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{L_1 s} = -\frac{L_1 C_1 s^2 + R_1 C_1 s + 1}{L_1 C_1 s^2}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_1(s)} = -\frac{\frac{1}{C_2 s}}{L_2 s + R_2} = -\frac{1}{C_2 s (L_2 s + R_2)}$$

Multiplicando ambas ecuaciones obtenemos:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + \frac{R_1}{L_1} s + \frac{1}{L_1 C_1}}{L_2 C_2 s^3 \left(s + \frac{R_2}{L_2}\right)}$$

1.2. ii)

Sustituyendo por los valores dados:

$$\begin{cases} C_2 = \frac{1}{1000.L_2.\omega_0^2} \Rightarrow \frac{1}{L_2.C_2} = 1000.\omega_0^2 \\ R_2 = 1000.L_2.\omega_0 \Rightarrow \frac{R_2}{L_2} = 1000.\omega_0 \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1.C_1}} \Rightarrow \frac{1}{L_1.C_1} = \omega_0^2 \\ L_1 = \frac{R_1^2.C_1}{4} \Rightarrow \frac{R_1^2}{L_1^2} = \frac{4}{L_1.C_1} \Rightarrow \frac{R_1}{L_1} = \frac{2}{\sqrt{L_1.C_1}} = 2.\omega_0 \end{cases}$$

Sustituyendo estos resultados en la fórmula para H(s):

$$H(s) = 1000.\omega_0^2.\frac{s^2 + 2.\omega_0.s + \omega_0^2}{s^3.(s + 1000.\omega_0)} = 1000.\omega_0^2.\frac{(s+\omega_0)^2}{s^3.(s + 1000.\omega_0)}$$

2. Parte b)

Podemos abrir el lazo antes de la primera L_1, o sea a la entrada del bloque de la parte anterior. Si inyectamos e_i en v_o tenemos $v_o = e_i.H(s)$, luego tenemos un divisor de voltaje formado por R_3 y el paralelo de C_3 y R es decir que el voltaje en bornes del capacitor sería $v_{c_3} = v_o.\frac{1}{1+R_3.\left(\frac{1}{R}+C_3.s\right)} = v_o.\frac{1}{1+\frac{R_3}{R}+R_3.C_3.s}$. Para hallar la transferencia de lazo abierto hay que anular la entrada. Como la entrada es un voltaje cortocircuitamos v_i con tierra, y al hacer esto por las resistencias conectadas a la pata más del primer operacional no circula corriente. Por lo tanto, la pata más queda con un voltaje nulo, comportándose este bloque como un amplificador inversor de ganancia $-K$ respecto al valor en v_{C_3}. Juntando todo esto tenemos que la transferencia de lazo abierto es:

$$“-A\beta'' = \frac{e_o}{e_i} = \frac{e_o}{v_{C_3}}.\frac{v_{C_3}}{v_o}.\frac{v_o}{e_i} = -k.\frac{1}{R_3.C_3.\left(s+\left(\frac{1}{R.C_3}+\frac{1}{R_3.C_3}\right)\right)}.H(s)$$

$$“A\beta'' = 1000.k.\omega_0^2.\frac{(s+\omega_0)^2}{s^3.R_3.C_3\,(s+1000.\omega_0).\left(s+\left(\frac{1}{R.C_3}+\frac{1}{R_3.C_3}\right)\right)}$$

3. Parte c)

Substituyendo los valores dados:

$$R_3 = \frac{1}{100.\omega_0.C_3} \Rightarrow \frac{1}{R_3.C_3} = 100.\omega_0$$

$$R = \frac{1}{900.\omega_0.C_3} \Rightarrow \frac{1}{R.C_3} = 900.\omega_0 \Rightarrow \frac{1}{R_3.C_3} + \frac{1}{R.C_3} = 1000.\omega_0$$

$$“A\beta'' = 10^5.k.\omega_0^3.\frac{(s+\omega_0)^2}{s^3.(s+1000.\omega_0)^2}$$

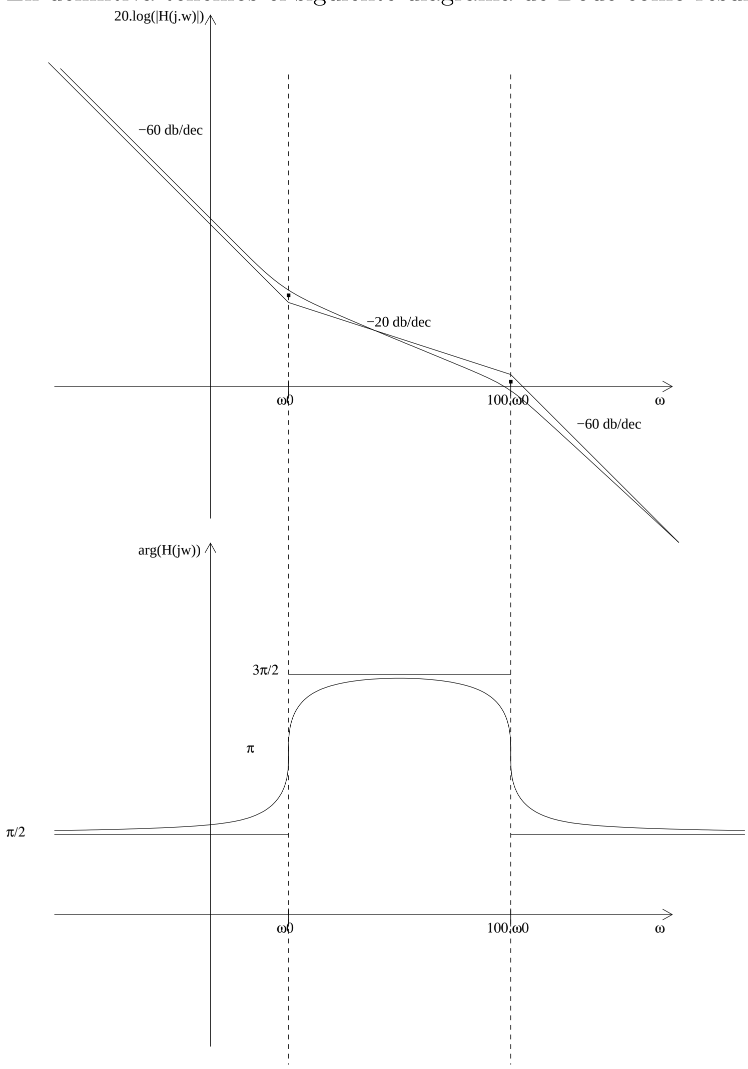
Para realizar el bode evaluamos $A\beta(j.\omega)$, y para hacer el Bode asintótico distinguimos tres zonas: $\omega << \omega_0$, $\omega_0 << \omega << 1000.\omega_0$ y $\omega >> 1000.\omega_0$

$$A\beta(j.\omega) = 10^5.k.\frac{\omega_0^3}{-j.\omega^3}.\frac{(j.\omega+\omega_0)^2}{(j.\omega+1000.\omega_0)^2}$$

Si $\omega << \omega_0 \Rightarrow A\beta(j.\omega) \simeq 10^5.k.\frac{\omega_0^5}{-j10^6.\omega^3.\omega_0^2} = k.\frac{j.\omega_0^3}{10.\omega^3} \Rightarrow |A\beta(j.\omega)|_{db}$ baja a 60 decibeles por década y $\arg(A\beta(j.\omega)) \simeq \frac{\pi}{2}$

Si $\omega_0 << \omega << 1000.\omega_0 \Rightarrow A\beta(j.\omega) \simeq 10^5.k.\frac{\omega_0^3.(-\omega^2)}{-j.\omega^3 10^6.\omega_0^2} = k.\frac{-j.\omega_0}{10.\omega} \Rightarrow |A\beta(j.\omega)|_{db}$ baja a 20 decibeles por década y $\arg(A\beta(j.\omega)) \simeq \frac{3.\pi}{2}$, si bien la variación de fase es de π, sabemos que la fase debe aumentar porque pasamos por un cero doble de parte real negativa, otra forma de verlo es evaluar en $A\beta(j.\omega_0)$ y ver

si su fase está entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ o entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3.\pi}{2}$. Si lo hiciéramos veríamos que la fase sería $\simeq \pi$
Si $\omega >> 1000.\omega_0 \Rightarrow A\beta\left(j.\omega\right) \simeq 10^5.k.\frac{\omega_0^3.\left(-\omega^2\right)}{-j.\omega^3.\left(-\omega^2\right)} = 10^5.k.\frac{j.\omega_0^3}{\omega^3} \Rightarrow \left|A\beta\left(j.\omega\right)\right|_{db}$ baja a 60 decibeles por década y $\arg\left(A\beta\left(j.\omega\right)\right) \simeq \frac{\pi}{2}$, nuevamente la variación entre el intervalo previo y este de la fase es de π, pero como ahora pasamos por un polo doble de parte real negativa, la fase debe disminuir.
En definitiva tenemos el siguiente diagrama de Bode como resultado:



$A\beta$ va a ser real cuando su fase sea π o $-\pi$, y según el diagrama de Bode de fase vemos que la fase se hace π para las frecuencias ω_0 y $1000.\omega_0$. En este caso es razonable basarse en el diagrama asintótico dado que los polos están muy separados (tres décadas) y por lo tanto la influencia de la fase del primer polo para ω cercano a $1000.\omega_0$ es prácticamente constante e igual a π, a su vez la influencia del segundo polo en frecuencias cercanas a ω_0 es prácticamente nula. Para terminar de verificar esta supocición, veremos que evaluando $''A\beta''$ en $j.\omega_0$ y en $1000.j.\omega_0$ el resultado da prácticamente un número real negativo. Para esto hallaremos la fase, la cual ya estaría hallada si hubíeramos usado el método de evaluar en los puntos para saber si la fase subía o bajaba π al pasar por los puntos notables ω_0 y $1000.\omega_0$.

$$\begin{aligned}\arg\left(``A\beta''\left(j.\omega\right)\right) &= \arg\left(j\right) + 2.\arg\left(j.\omega + \omega_0\right) - 2.\arg\left(j.\omega + 1000.\omega_0\right)\\ &= \frac{\pi}{2} + 2.\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 2.\arctan\left(\frac{\omega}{1000.\omega_0}\right)\\ \Rightarrow \arg\left(``A\beta''\left(j.\omega_0\right)\right) &= \frac{\pi}{2} + 2.\frac{\pi}{4} - 2.\arctan\left(\frac{1}{1000}\right) \simeq \pi - 0{,}002\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\arg\left(``A\beta''\left(1000.j.\omega_0\right)\right) &= \frac{\pi}{2} + 2.\arctan\left(1000\right) - 2.\frac{\pi}{4}\\ &= 2.\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(0{,}001\right)\right) = \arg\left(``A\beta''\left(j.\omega_0\right)\right)\end{aligned}$$

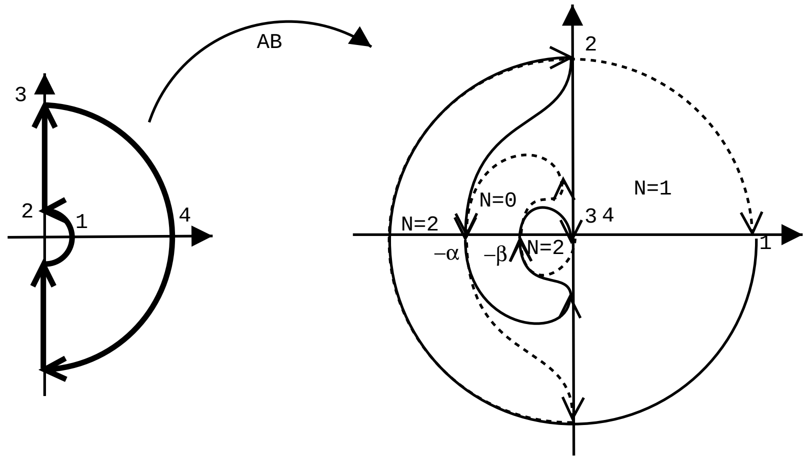
En las anteriores ecuaciones vemos que el argumento de $''A\beta''$ es prácticamente π en ambos puntos.

4. Parte d)

Para hacer el diagrama de Nyquist debemos elegir una curva cerrada que abarque todo el semiplano derecho y que no pase por ningún polo de $''A\beta''$, como en este caso $''A\beta''$ tiene un polo en cero, vamos a tener que usar una curva como la de la figura, en la cual el mapeo de la curva a través de $''A\beta''$ del tramo 2-3 lo sacamos de diagrama de Bode de la parte anterior. Como el grado del numerador es menor que el del denominador la curva 3-4 se mapea al origen cuando su radio tiende a infinito. El mapeo de la curva 1-2 lo desarrollamos a continuación, para ello lo primero que tenemos que hacer es parametrizar la curva $\Gamma_{1-2} = r.e^{j.\theta}$ con θ llendo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y con r tendiendo a 0.

$$``A\beta''\left(r\right) \underset{r\to 0}{\simeq} \frac{10^5.k.\omega_0^5}{r^3.e^{3.j.\theta}10^6\omega_0^2} = k.\frac{\omega_0^3}{10.r^3}.e^{-3.j.\theta}$$

La curva resultante es un arco de circunferencia cuyo radio tiende a infinito y su argumento arranca en 0 y disminuye hasta llegar a $-\frac{3.\pi}{2}$, o lo que es lo mismo $\frac{\pi}{2}$ que es donde arranca el Bode. Con estos datos el diagrama de Nyquist nos queda como el de la figura.



Como el número de polos encerrados por la curva es cero, para que el sistema sea estable según el criterio de Nyquist, el número de vueltas que encierra al punto -1 debe ser cero. Por lo tanto se tiene que cumplir que el punto -1 debe estar en la región etiquetada como $N = 0$ para que el sistema sea estable. Es decir que α debe ser mayor que 1 y β menor.
Cómo se vió en la parte anterior estos puntos son los mapeos de los puntos $\pm j.\omega_0$ y $\pm 1000.j.\omega_0$, o sea que $\alpha = |''A\beta''\,(j.\omega_0)|$ y $\beta = |''A\beta''\,(1000.j.\omega_0)|$. por lo que tenemos:

$$\alpha \simeq \left|\frac{10^5.k.\omega_0^5.\,(j+1)^2}{-j10^6.\omega_0^5}\right| = \frac{2.k}{10} = \frac{k}{5}$$

$$\beta \simeq \left|\frac{10^{11}.k.\omega_0^5}{-j10^{15}.\omega_0^5.\,(j+1)^2}\right| = \frac{k}{2*10^4}$$

Por lo tanto para que el sistema sea estable se tiene que cumplir que $\boxed{5 < k < 2*10^4}$