Sistemas Lineales 2

Segundo Parcial - Año 2000

(24 de febrero del 2001)

Te solicitamos:

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.

- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.

- utilizar las hojas de un solo lado.

- resolver problemas diferentes en hojas separadas.

- al finalizar la prueba, **colocar las hojas dentro del sobre**, depositar el mismo sobre el banco y retirarse del salón.

- **NO ESCRIBIR NI RAYAR EL SOBRE**, ya que será re-utilizado.

Se recuerda que la prueba es individual y **dura 4 horas**.

Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

Problema 1 **(12 puntos)**

Sea el circuito de la figura1, donde los diodos D_1 y D_2 son ideales, los operacionales son ideales trabajando en zona lineal, y la entrada $V_{in}(t)$ es una señal sinusoidal.

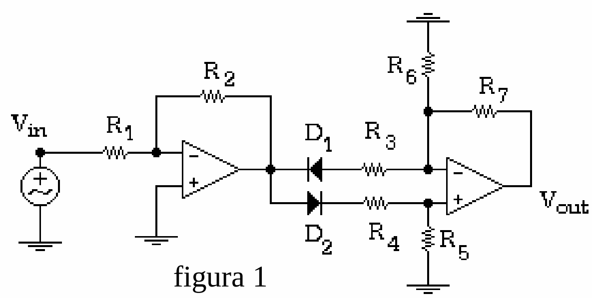


figura 1

a) Calcular $V_{out}(t)$, en función de la entrada y de los parámetros del circuito. **Justifique y verifique debidamente las hipótesis utilizadas.**

b) Sabiendo que $R_5 = R_6 = 2R$ y $R_7 = R_4 = R$, calcular el valor de R_3, en función de R, para que la salida sea simétrica.

Problema 2 **(18 puntos)**

a) Definir estabilidad BIBO para un sistema lineal, causal, invariante en el tiempo.

b) Demostrar que para el caso en que la respuesta al impulso del sistema es una función, la integrabilidad absoluta de la misma es condición suficiente de estabilidad BIBO. (Escribir claramente Hipótesis y Tesis y justificar los pasos de la demostración).

c) Utilizando el Criterio de Nyquist, y justificando todos los pasos dados, hallar el rango de valores reales de K que aseguran la estabilidad en lazo cerrado del sistema que tiene la siguiente transferencia de lazo abierto:

$$-Ab(s) = -\frac{1}{t}\cdot\frac{s+{}^{1}\!/_{t}}{s\left(s-{}^{1}\!/_{10.t}\right)}$$

Problema 3 **(18 puntos)**

a) En los circuitos de la figura 2, hallar la expresión temporal del voltaje en el condensador y la corriente en la bobina en función de las constantes I_{cte}, v_{C0}, V_{cte}, i_{L0}.

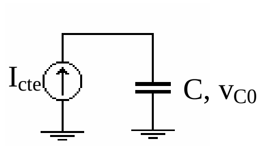


figura 2.a)

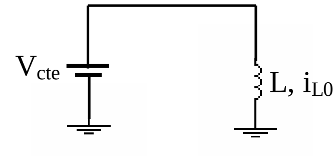


figura 2.b)

b) En el circuito de la figura 3, LL es una llave controlada por un relé de bobina L. Cuando la corriente que circula por L es **mayor que I_0**, la llave conecta la fuente de corriente (punto 1) a v_2 (punto 2) y cuando es **menor que I_0**, la llave conecta la fuente de corriente (punto 1) a la resistencia R (punto 3).

Se cumple que $\dfrac{L.I_0}{V_{CC}} = \dfrac{V_{Ref}.C}{I_f} = T$, $V_{Ref}, V_{CC}, I_f, I_0 > 0$,.

El operacional tiene ganancia infinita; observar que funciona como comparador.

i. Calcular y graficar los voltajes $v_1(t)$ y $v_2(t)$ y la corriente $i_L(t)$ hasta llegar al régimen sabiendo que en t = 0 las condiciones iniciales son nulas tanto en la bobina como en el condensador.

ii. ¿Cuál es el periodo de las señales halladas?

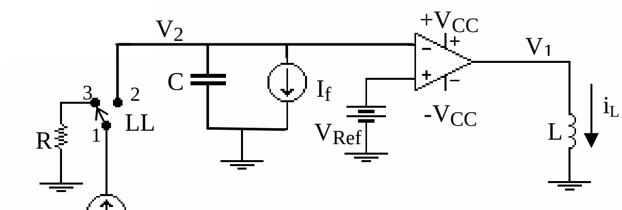


figura 3

Problema 4 **(12 puntos)**

a) Realizar los Diagramas de Bode de la transferencia del circuito de la figura 4, para R1=R/2, $\omega_0 = 1/RC$.

b) Hallar una expresión aproximada de la salida en régimen $v_S(t)$ sabiendo que la entrada $v_i(t)$ es una señal periódica de pulsación $3.\omega_0/4$.

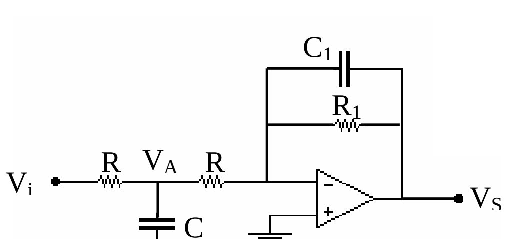
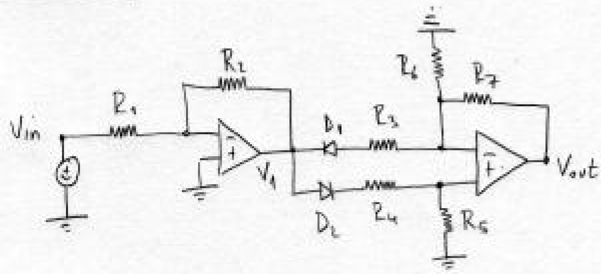


figura 4

SISTEMAS LINEALES 2: SEGUNDO PARCIAL 2000

1

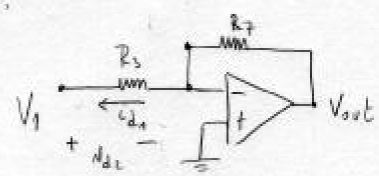
Problema 1:



D_1 y D_2 diodos ideales. Amplificadores operacionales ideales trabajando en zona lineal. V_{in} entrada sinusoidal.

La primera etapa es un inversor de ganancia $\frac{R_2}{R_1}$ $\Rightarrow V_1(t) = -\frac{R_2}{R_1} V_{in}(t)$.

Estudiemos en el semiciclo positivo de V_{in}. Supongo D_1 ON y D_2 OFF. El circuito equivalente es:



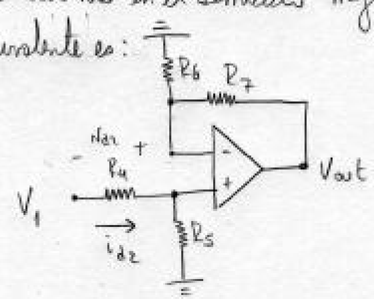
Es un inversor de ganancia $\frac{R_7}{R_3}$ $\Rightarrow \boxed{V_{out} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_7}{R_3} V_{in}}$

Verifiquemos el supuesto acerca del estado de los diodos:

$$i_{d1} = -\frac{V_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}\frac{V_{in}}{R_3} > 0$$

$$v_{d2} = V_1 = -\frac{R_2}{R_1} V_{in} < 0$$

Estudiemos en el semiciclo negativo de V_{in}. Supongo D_1 OFF y D_2 ON. El circuito equivalente es:



Es una configuración no inversora de ganancia $\frac{R_7+R_6}{R_6}$ y entrada $\frac{R_5}{R_4+R_5} V_1$

$$\Rightarrow \boxed{V_{out} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{R_5}{R_4+R_5}\frac{R_7+R_6}{R_6} V_{in}}$$

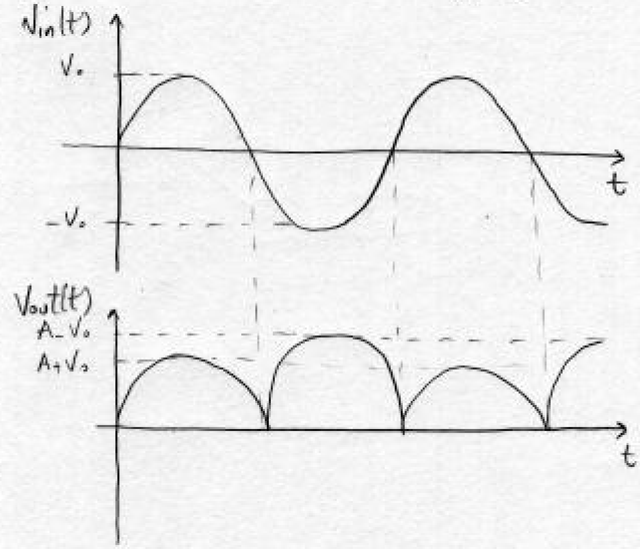
Verifiquemos el supuesto acerca del estado de los diodos:

$$i_{d2} = \frac{V_1}{R_4+R_5} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{V_{in}}{R_4+R_5} > 0$$

$$v_{d2} = V_1 \cdot \frac{R_5}{R_4+R_5} - V_1 = -\frac{R_4}{R_4+R_5} V_1 = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_4}{R_4+R_5} V_{in} < 0$$

2

Definiendo los parámetros $A_+ = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_7}{R_3}$, $A_- = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_5}{R_4+R_5}\frac{R_7+R_6}{R_6}$



$V_{in}(t) = V_0 \sin w_0 t$

1) $R_5 = R_6 = 2R$, $R_7 = R_4 = R$.

Si V_{out} es simétrica $\Rightarrow$ $V_o A_+ = V_o A_- \Rightarrow \frac{R_7}{R_3} = \frac{R_5}{R_4+R_5}\frac{R_7+R_6}{R_6}$

$\Rightarrow \frac{R}{R_3} = \frac{2R}{3R}\cdot\frac{3R}{2R} = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{R_3 = R}$

3

Problema 2:

(a) Un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo es BIBO estable si y solo si para toda entrada que sea una función acotada, corresponde una señal de salida también función acotada.

(b) Hipótesis: sistema lineal, causal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h(t)$, función. Sea $x(t)$ una entrada acotada ($|x(t)|<M$). $\int_0^{+\infty}|h(t)|\,dt<\infty$

Tesis: el sistema es BIBO estable.

Dem: Para un sistema como el de las hipótesis, la salida resulta $y(t)=h(t)*x(t)$.

Como son funciones, $$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau \underset{\substack{\text{sistema}\\ \text{causal} \Rightarrow h(t)=0,\ t<0}}{=} \int_0^{+\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

En módulo $$|y(t)| \le \int_0^{+\infty}|h(\tau)|\,|x(t-\tau)|\,d\tau \le M\int_0^{+\infty}|h(\tau)|\,d\tau \underset{\substack{\text{hipótesis de } h(t)\\ \text{sumable}}}{<} \infty \Rightarrow y(t) \text{ acotada}$$

$\Rightarrow$ El sistema es BIBO estable por definición.

(c) $$-A\beta(s) = -\frac{K}{T}\,\frac{\left(s+\frac{1}{T}\right)}{s\left(s-\frac{1}{10T}\right)}$$

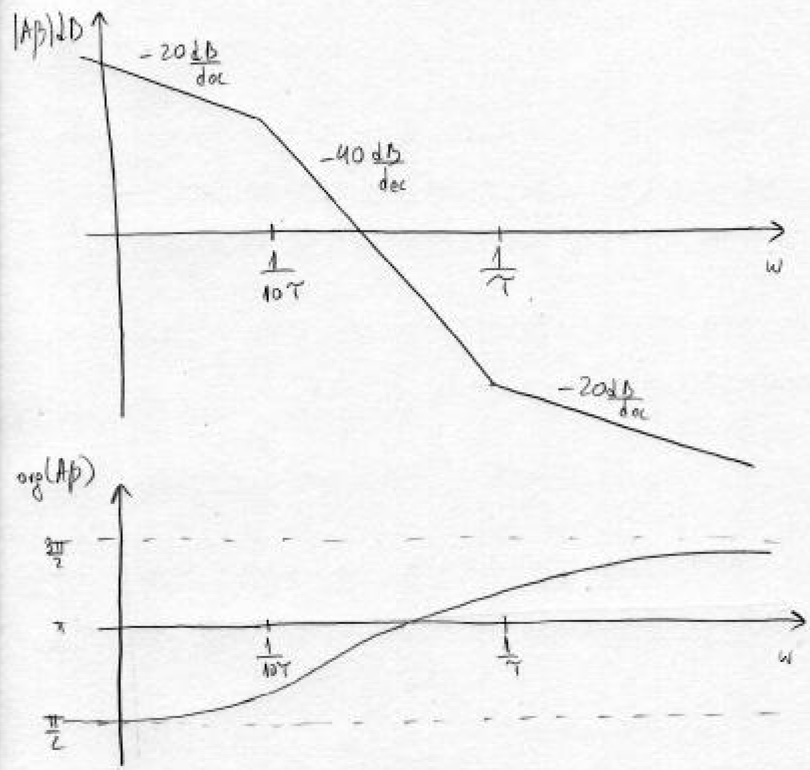
En primer lugar, realizamos los Diagramas de Bode de: $$A\beta(j\omega)=\frac{K}{T}\,\frac{\left(j\omega+\frac{1}{T}\right)}{j\omega\left(j\omega-\frac{1}{10T}\right)}$$

Si $\omega \ll \frac{1}{10T} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{10K}{Tj\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)| \simeq 20\log\frac{10K}{T} - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta(j\omega)) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

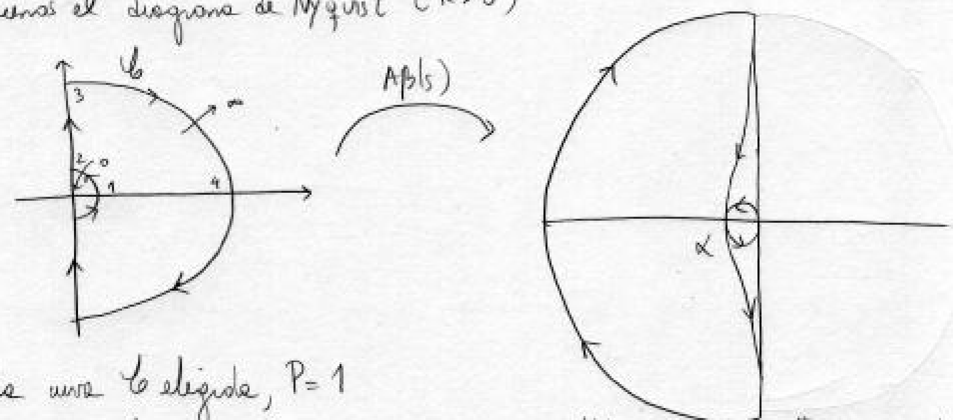
Si $\frac{1}{10T} \ll \omega \ll \frac{1}{T} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{-K}{T^2\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)| = 20\log\frac{K}{T^2} - 40\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta(j\omega)) \simeq \pi \end{cases}$

Si $\omega \gg \frac{1}{T} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{K}{Tj\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)| \simeq 20\log\frac{K}{T} - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta(j\omega)) \simeq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

4



Resolvemos el diagrama de Nyquist (K>0)



Para la curva 𝒞 elegida, P= 1

De 1 a 2, $s=re^{j\theta}$ con $r\to 0$ y $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}] \Rightarrow A\beta(re^{j\theta}) = -\frac{10K}{\tau r}e^{-j\theta}$, es decir describe un arco de circunferencia con radio tendiendo a ∞, de π a $\frac{\pi}{2}$

De 2 a 3 uso la información del Bode.

De 3 a 4 se mapea al origen

El resto, simétrico respecto al eje real.

Para estabilidad debe ser $N=-1= Z-P \Rightarrow Z=0$. Del Nyquist vemos que si $\alpha<-1$, se rodea al -1 una vez en sentido antihorario y el sistema será estable.

5

Calculemos α: $\alpha = A\beta(j\omega_0) = \frac{K}{\tau}\frac{(j\omega_0 + \frac{1}{\tau})}{j\omega_0(j\omega_0 - \frac{1}{10\tau})}$

$\Rightarrow \alpha\left(-j\frac{\omega_0}{10} - \tau\omega_0^2\right) = \frac{K}{\tau} + Kj\omega_0$

Igualando partes imaginarias: $\alpha = -10K$

$\Rightarrow -10K < -1 \Rightarrow K > \frac{1}{10}$ para estabilidad

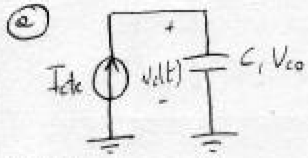
Por otro lado si $K<0$, el diagrama de Nyquist queda todo comprendido en el semiplano derecho, y será siempre inestable ya que no hay forma de que $N=-1$

En resumen, si $\boxed{K > \frac{1}{10}}$ es <u>ESTABLE</u>

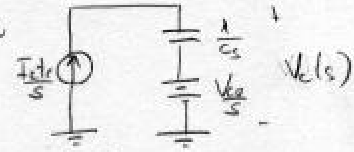
6

Problema 3:

a)

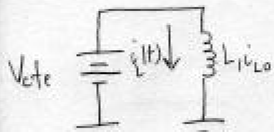


El circuito en Laplace resulta

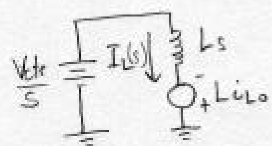


Planteando que la corriente que entrega la fuente circula por el condensador:

$$\frac{I_{cte}}{s} = \left(V_c - \frac{V_{c0}}{s}\right) Cs \Rightarrow V_c(s) = \frac{I_{cte}}{Cs^2} + \frac{V_{c0}}{s} \rightarrow \boxed{v_c(t) = \left[\frac{I_{cte}}{C}t + V_{c0}\right] Y(t)}$$



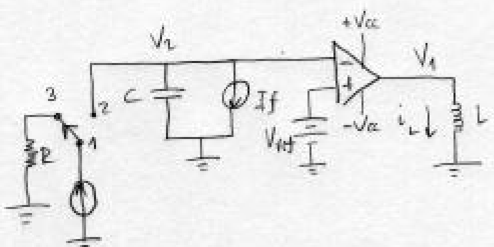
El circuito en Laplace resulta



Planteando directamente la ecuación que da la corriente en la bobina:

$$\frac{\frac{V_{cte}}{s} + L i_{L0}}{Ls} = I_L(s) \Rightarrow I_L(s) = \frac{V_{cte}}{Ls^2} + \frac{i_{L0}}{s} \rightarrow \boxed{i_L(t) = \left[\frac{V_{cte}}{L}t + i_{L0}\right] Y(t)}$$

b)



LL controlada por relé de bobina L.

Si $\begin{cases} i_L > I_0 \text{ , LL conecta 1 y 2} \\ i_L < I_0 \text{ , LL conecta 1 y 3} \end{cases}$

Operacional ideal, trabajando en zona no lineal entre niveles $\pm V_{cc}$. $\frac{L I_0}{V_{cc}} = \frac{V_{ref} C}{I_f} = T$

$i_L(0) = 0$, $v_2(0) = 0$

Estudiamos para $t \geq 0$. Como $i_L(0) < I_0$ la llave se conecta a la resistencia R.

Por otro lado como $v_2(0) = 0 \Rightarrow e_+ = V_{ref} > e_- = V_2 \Rightarrow \boxed{V_1(t) = V_{cc} Y(t)}$

Reconociendo las configuraciones de la parte a) con $V_{cte} = V_{cc}$, $I_{cte} = -I_f$ y datos previos nulos se tiene que:

$$\boxed{v_2(t) = -\frac{I_f}{C} t Y(t)} \quad , \quad \boxed{i_L(t) = \frac{V_{cc}}{L} t Y(t)}$$

El comparador nunca va a conmutar, veamos cuando conmuta la llave.

Se dará para $t = t_0 \ / \ i_L(t_0) = I_0$

7

$\Rightarrow \boxed{t_0 = \dfrac{I_0 L}{V_{cc}} = T}$ $\quad v_2(T) = -V_{ref}$, $i_L(T) = I_0$

Estudiamos para $t' = t - t_0 \geq 0$ la llave conmuta y la fuente de $2I_f$ queda en paralelo con el condensador y la de $-I_f$. Puede verse como una fuente equivalente I_f.

$\boxed{v_1(t') = V_{cc}\,Y(t')}$, $\boxed{v_2(t') = \left(\dfrac{I_f}{C} t' - V_{ref}\right) Y(t')}$, $\boxed{i_L(t') = \left(\dfrac{V_{cc}}{L} t' + I_0\right) Y(t')}$

La llave nunca va a conmutar, veamos cuando conmuta el comparador: Se da para

$t' = t_1 \,/\, v_2(t_1) = V_{ref}$

$\Rightarrow \boxed{t_1 = \dfrac{2V_{ref}C}{I_f} = 2T}$ $\quad v_2(2T) = V_{ref}$, $i_L(2T) = 3I_0$

Estudiamos para $t'' = t' - t_1 \geq 0$. El comparador conmuta a $-V_{cc}$

$\boxed{v_1(t'') = -V_{cc}\,Y(t'')}$, $\boxed{v_2(t'') = \left(\dfrac{I_f}{C} t'' + V_{ref}\right) Y(t'')}$, $\boxed{i_L(t'') = \left(-\dfrac{V_{cc}}{L} t'' + 3I_0\right) Y(t'')}$

El comparador nunca va a conmutar, veamos cuando conmuta la llave. Se da para

$t'' = t_2 \mid i_L(t_2) = I_0$

$\Rightarrow \boxed{t_2 = 2\dfrac{I_0 L}{V_{cc}} = 2T}$ $\quad v_2(2T) = 3V_{ref}$, $i_L(2T) = I_0$

Estudiamos para $t''' = t'' - t_2 \geq 0$. La llave conmuta y conecta la fuente de $2I_f$ a R. Solo la fuente de $-I_f$ alimenta al condensador.

$\boxed{v_1(t''') = -V_{cc}\,Y(t''')}$, $\boxed{v_2(t''') = \left(-\dfrac{I_f}{C} t''' + 3V_{ref}\right) Y(t''')}$, $\boxed{i_L(t''') = \left(-\dfrac{V_{cc}}{L} t''' + I_0\right) Y(t''')}$

La llave nunca va a conmutar, veamos cuando conmuta el comparador. Se da para

$t''' = t_3 \,/\, v_2(t_3) = V_{ref}$

$\Rightarrow \boxed{t_3 = 2\dfrac{V_{ref}C}{I_f} = 2T}$ $\quad v_2(2T) = V_{ref}$, $i_L(2T) = -I_0$

Estudiamos para $t^{iv} = t''' - t_3 \geq 0$. El comparador conmuta a V_{cc}

$\boxed{v_1(t^{iv}) = V_{cc}\,Y(t^{iv})}$, $\boxed{v_2(t^{iv}) = \left(-\dfrac{I_f}{C} t^{iv} + V_{ref}\right) Y(t^{iv})}$, $\boxed{i_L(t^{iv}) = \left(\dfrac{V_{cc}}{L} t^{iv} - I_0\right) Y(t^{iv})}$

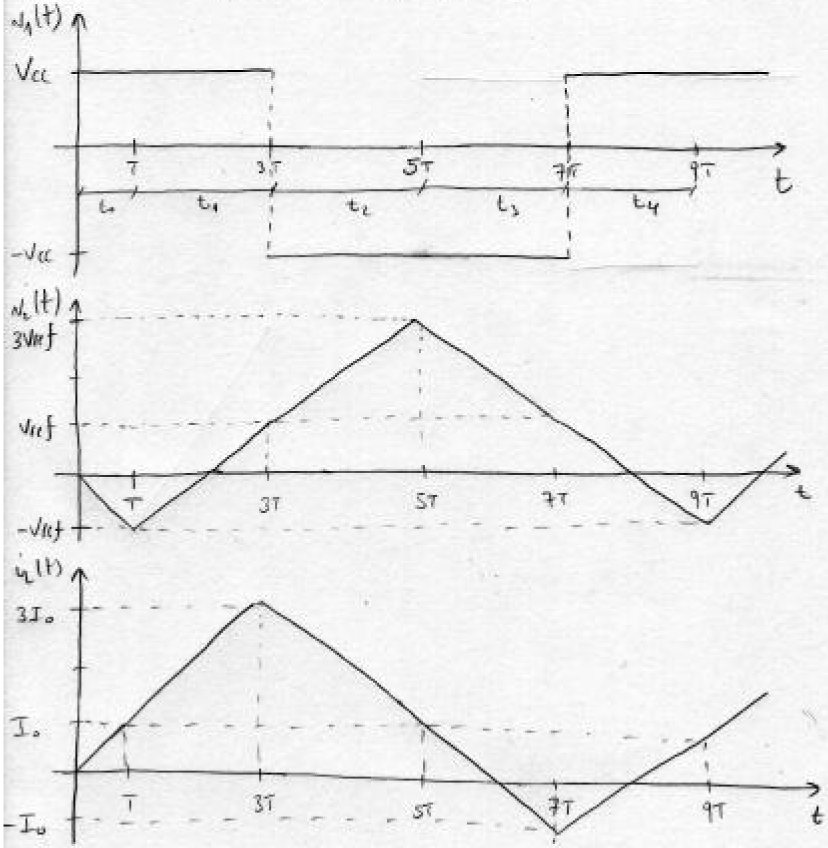
(8)

El comparador nunca va a conmutar, veamos cuando conmuta la llave.

Se da para $t^{IV} = t_4 \mid i_L(t^{IV}) = I_0$

$\Rightarrow \boxed{t_4 = 2\frac{I_0 L}{V_{cc}} = 2T}$ $\quad v_L(2T) = -V_{ref}$, $i_L(2T) = I_0$.

Notando que para el próximo tramo tengo la llave conectada a 2, el comparador a V_{cc} y datos previos $-V_{ref}$ y I_0, estoy igual que en $t = T$. Por lo tanto alcanzo el régimen.

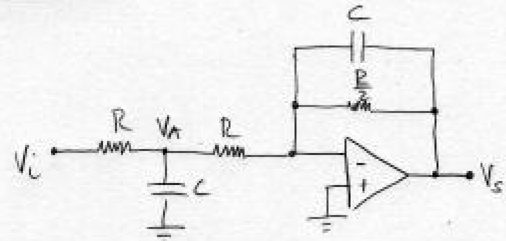


(b) $v_1(t)$, $v_2(t)$, $i_L(t)$ de período $\boxed{8T}$

9

Problema 4:

(a)

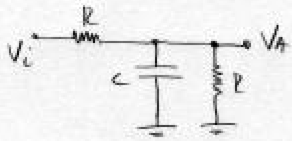


$w_o = \frac{1}{RC}$

Amplificador operacional ideal, trabajando en zona lineal.

Estudio en dos etapas, primero de V_i hasta V_A y luego de V_A hasta V_s.

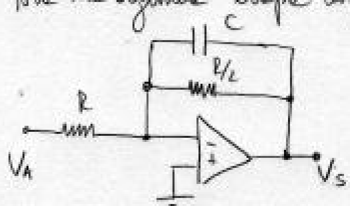
Para calcular la transferencia $H_1(s) = \frac{V_A(s)}{V_i(s)}$, debo cargar la primera etapa con la impedancia vista de la segunda (R):



$$\Rightarrow H_1(s) = \frac{\frac{R}{RCs+1}}{R+\frac{R}{RCs+1}} = \frac{1}{RCs+2}$$

Divisor de tensiones

Para la segunda etapa tengo:



Configuración inversora

$$\Rightarrow H_2(s) = -\frac{\frac{R}{RCs+2}}{R} = -\frac{1}{RCs+2}$$

$$\Rightarrow H(s) = H_1(s)\,H_2(s) \Rightarrow H(s) = -\frac{w_o^2}{(s+2w_o)^2}$$

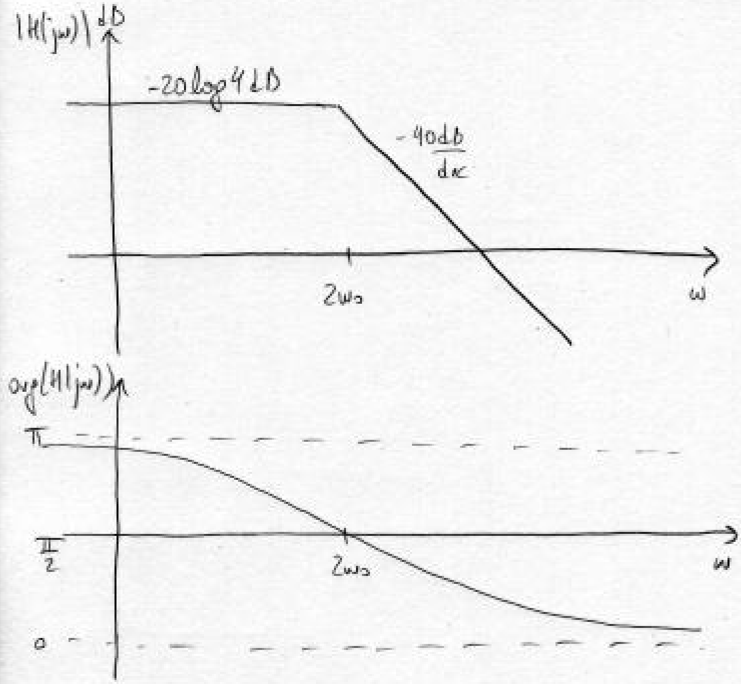
Estudiamos los Diagramas de Bode de $H(jw) = -\frac{w_o^2}{(jw+2w_o)^2}$

Si $w \ll 2w_o \Rightarrow H(jw) \simeq -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} |H(jw)| \simeq -20\log 4 \text{ dB} \\ \arg(H(jw)) \simeq \pi \end{cases}$

Si $w \gg 2w_o \Rightarrow H(jw) \simeq \frac{w_o^2}{w^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(jw)| \simeq 20\log w_o^2 - 40\log w \text{ dB} \\ \arg(H(jw)) \simeq 0 \end{cases}$

$H(j2w_o) = -\frac{1}{4(1+j)^2} = \frac{1}{8}j \Rightarrow \begin{cases} |H(j2w_o)| = \frac{1}{8} \\ \arg(H(j2w_o)) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(10)



b) Sea $v_i(t)$ una señal de entrada periódica de pulsación $\frac{3w_0}{4}$. Dicha señal puede escribirse como Serie de Fourier: $v_i(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-j\frac{3w_0}{4}nt}$

$$\Rightarrow v_o(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H\left(j\frac{3w_0 n}{4}\right) c_n e^{-j\frac{3w_0 n}{4}t}.$$

Pero siendo nuestro sistema un pasabajos de segundo orden, podemos suponer que sólo pasan la componente de continua y los armónicos menores a $2w_0$. En la banda pasante el filtro introduce una ganancia de $\frac{1}{4}$ y un desfasaje de π; por lo tanto:

$$\boxed{v_o(t) \approx -\frac{1}{4}\left[c_0 + 2\mathrm{Re}\left(c_1 e^{j\frac{3w_0}{4}t}\right) + 2\mathrm{Re}\left(c_2 e^{j\frac{3w_0}{2}t}\right)\right]}$$