Sistemas Lineales 2 - Primer Parcial

Problema 1.-

a) En el circuito de la Fig. 1, hallar el voltaje $e(t)$, a partir del voltaje inicial del capacitor V_{C0}. V_1 es un voltaje de continua.

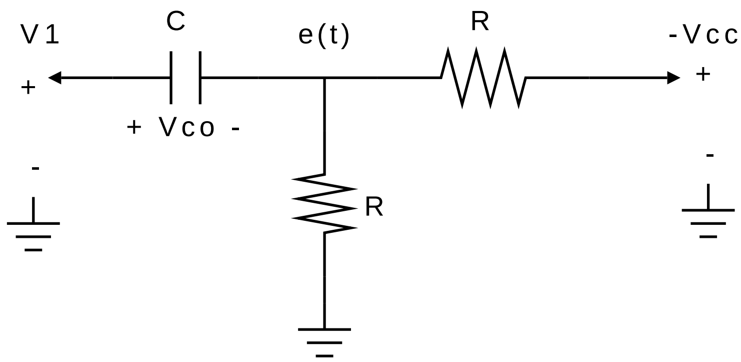


Figure 1: Circuito Correspondiente al Problema 1.

b) En el circuito de la Fig. 2, el amplificador operacional es ideal.
- El circuito se supone en régimen, con la llave S abierta.
1) Calcular el voltaje de salida V_O y el voltaje al que se encuentra cargado el capacitor C.
- En esas condiciones, en $t = 0$, se cierra la llave S por un brevísimo intervalo de tiempo, suficiente para provocar la transición del amplificador operacional. Inmediatamente, la llave S vuelve a abrir.
2) Calcular y dibujar la evolución del voltaje $V(t)$, en la entrada + del operacional, para todo $t > 0$, explicando claramente las causas de dicha evolución.
3) Dibujar - en correspondencia con $V(t)$ - el voltaje de salida $V_O(t)$ para todo $t > 0$.
4) Hallar el valor de la constante de tiempo = RC, para obtener a la salida un pulso de duración 1 segundo.

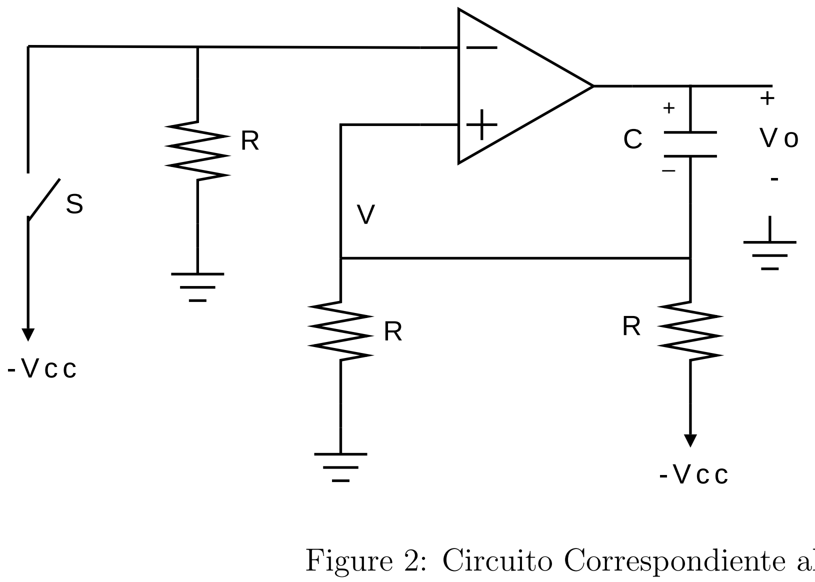


Figure 2: Circuito Correspondiente al Problema 1.

Problema 2.- Considere el circuito que se muestra en Figura 3, el cual se encuentra inicialmente en reposo, y en donde D es un diodo ideal. Los parámetros L, R, y C son dados y son tales que se verifica $0 < \zeta < 1$, donde $\zeta = \frac{1}{2}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, y por conveniencia también acá definimos $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. La función excitación v_g esta definida de la siguiente manera:

$$v_g(t) = \begin{cases} 0\ , & t < 0 \\ V\ , & t \in [0, T) \\ 0\ , & t \geq T \end{cases}$$

donde $V > 0$, y $T > 0$, son dados.
La llave S solo permanece cerrada durante el intervalo $[0, T)$.

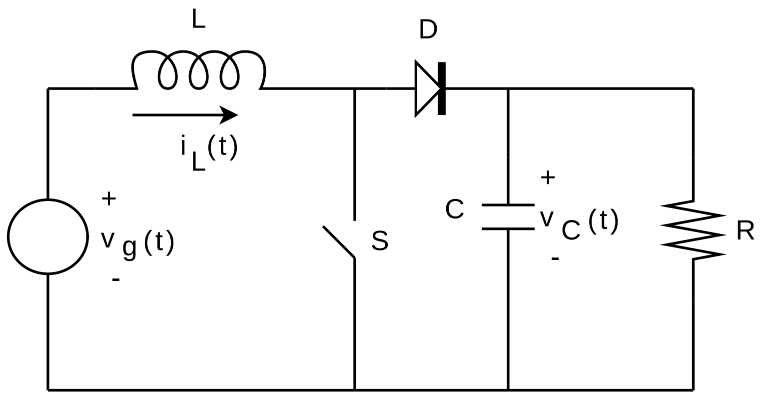


Figure 3: Circuito Correspondiente al Problema 2.

a) Hallar las expresiones de la corriente $i_L(t)$ y del voltaje $v_C(t)$ (que se indican en Figura 3) validas para todo $t \geq 0$. Exprese su respuesta claramente y solo en términos de V, L, T, t, ζ, y ω_0.

b) Grafique las funciones i_L y v_C halladas en la parte **(a)**.

c) Calcule $\int_0^{+\infty} \frac{v_C^2(t)}{R} dt$. Es decir, la energía total disipada en el resistor. Exprese su respuesta claramente y solo en términos de V, L, y T.

Problema 3.- Considere el circuito de la Figura 4. Los amplificadores operacionales son todos ideales. El operacional 1 funciona como comparador, en tanto el resto funciona en zona lineal. Las dos inductancias conforman un transformador perfecto. Se cumple que $RC = \frac{L}{R} = \tau$.

a) Partiendo de condiciones iniciales nulas y suponiendo que el comparador arranca en $+V_{CC}$, mostrar que existe un instante de tiempo en el que el comparador conmuta por primera vez. Escriba una ecuación que al resolverla determine dicho instante de tiempo.

b) Calcule las tensiones de salida de los tres operacionales en el tramo que va desde $t = 0$ hasta dicho instante.

Nota: Debe verificar las hipótesis sobre el comparador y explicar **claramente** el análisis de los operacionales.

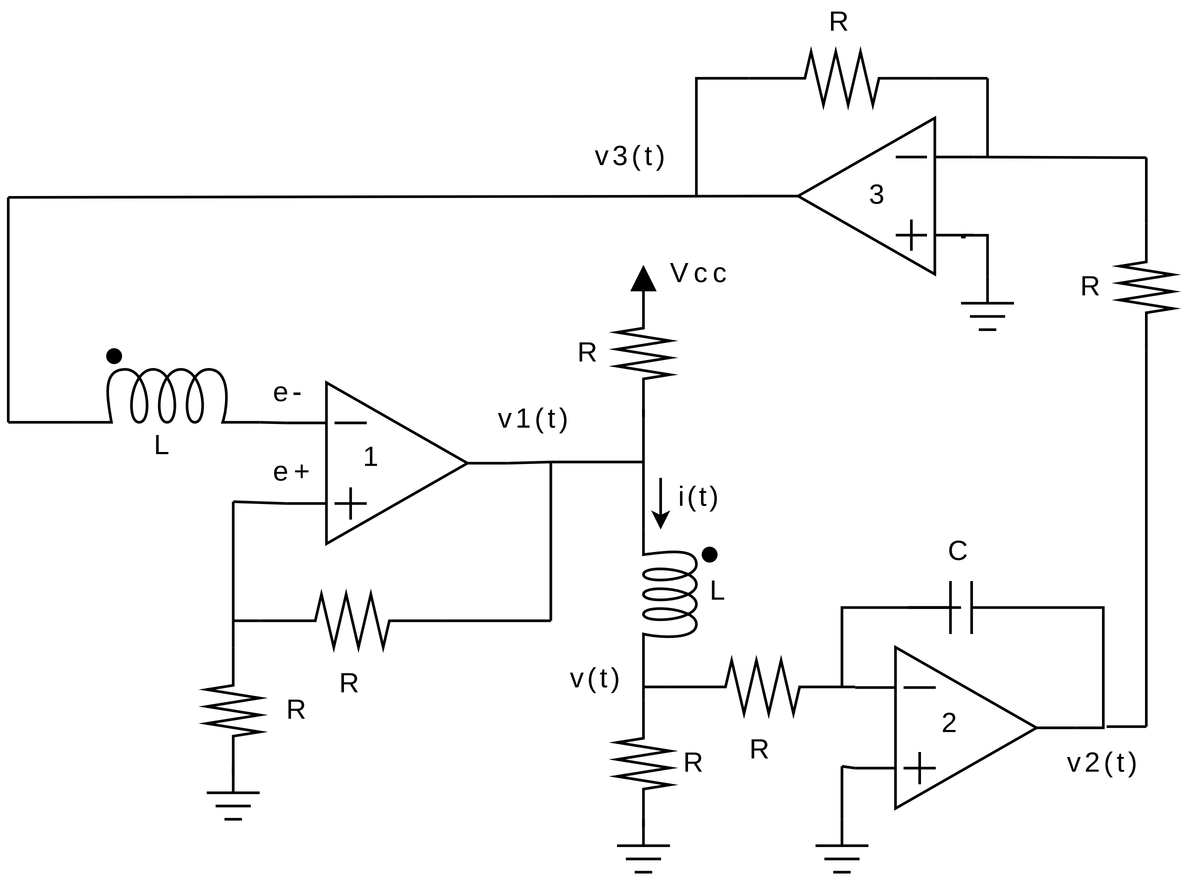


Figure 4: Circuito Correspondiente al Problema 3.

Problema 4.- El esquema de la Figura 5 muestra un sistema electro-mecánico movido por un motor eléctrico de corriente continua e imanes permanentes. El comportamiento dinámico de dicho motor es descripto por las siguientes ecuaciones:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_M(t) = v_i(t) \ ,$$
$$\tau(t) = ki(t) \ , \ v_M(t) = k\omega(t) \ ,$$

donde $L > 0$, $R > 0$, y $k > 0$ son parámetros dados, $\omega(t)$ es la velocidad angular del motor, $\tau(t)$ es el torque generado por el motor, y $v_i(t)$ es la tension con que este es excitado. El eje del motor está soldado a un disco, de radio r, que enrolla una cuerda que en el otro extremo tiene colgando una masa m que a su vez está unida a un resorte de constante k_1. El sistema compuesto por (el disco) + (el eje) + (el rotor (del motor)) tiene momento de inercia J. Se supone que la masa de la cuerda es despreciable, por lo que la tension $F(t)$ es la misma a lo largo de toda la cuerda. Vea la Figura 5 donde se muestra la fuerza ejercida por la cuerda sobre el disco, y por la cuerda sobre la masa m . $x(t)$ es la desviación en la posición de la masa con respecto a la longitud natural del resorte; véase la figura. $\theta(t)$, indicada en la figura, indica la posición angular del eje con respecto a alguna referencia prefijada. Con las direcciones indicadas en la figura tenemos que $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$. Se pide:

a) Halle la función de transferencia H que vincula la entrada v_i con la salida x del sistema. Es decir, halle $H(s)$ tal que, con condiciones iniciales nulas, se verifica que $X(s) = H(s)V_i(s)$, donde $V_i = \mathcal{L}\{v_i\}$ y $X = \mathcal{L}\{x\}$.

b) Asuma que los polos de H tienen parte real negativa. Halle la posición final x_F a la que se estabiliza la masa cuando se excita el sistema con una entrada v_i dada por:

$$v_i(t) = \begin{cases} \frac{E}{T}t \ , & t \in [0, T) \\ E \ , & t \geq T \end{cases} \quad .$$

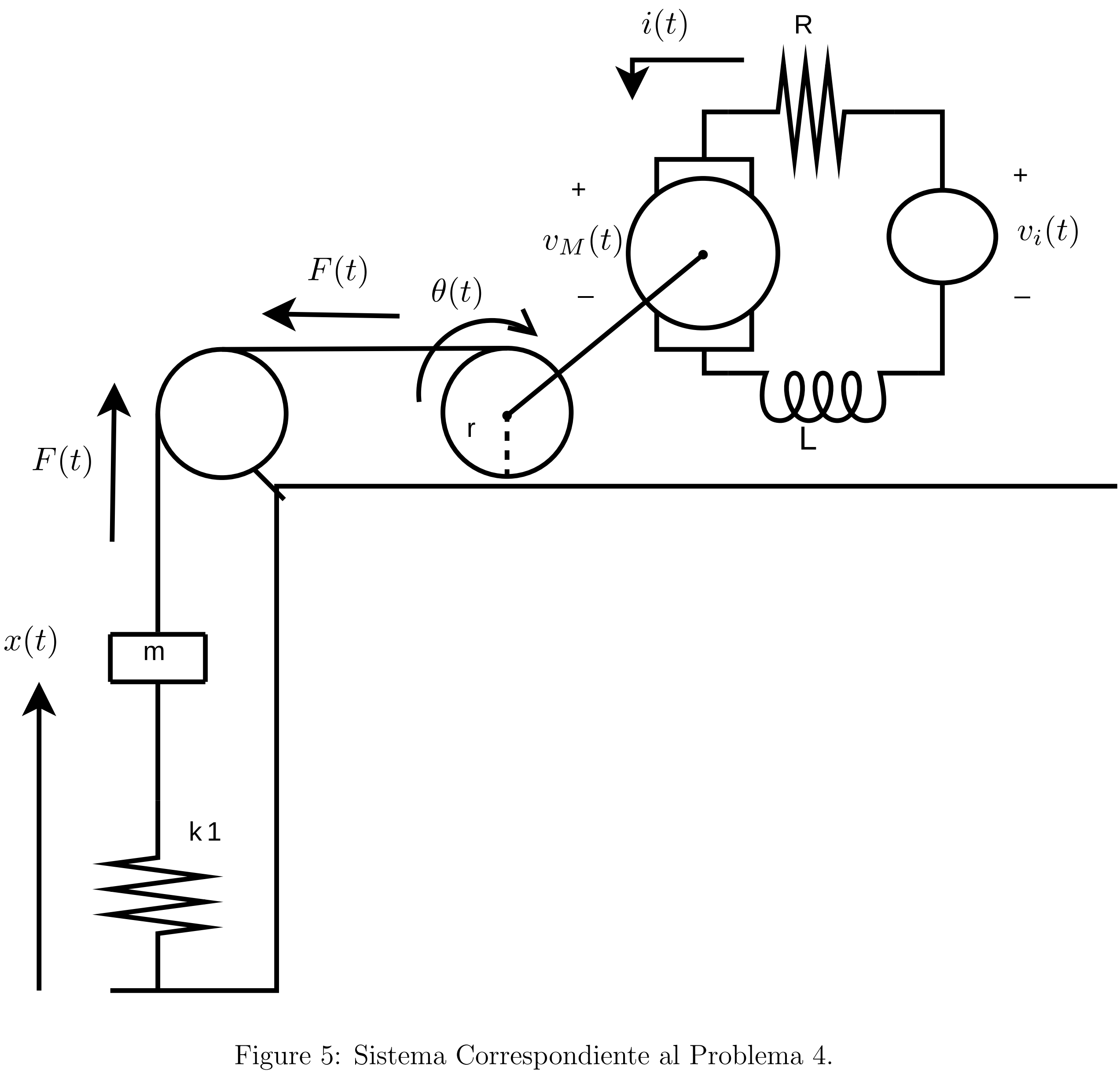
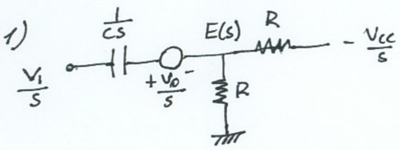


Figure 5: Sistema Correspondiente al Problema 4.

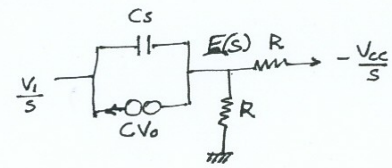
a)

El circuito se puede analizar de diversas formas

a1)

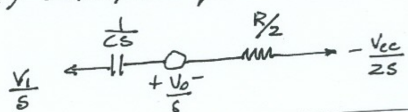


a2)



a3) Por superposición de $\frac{V_1}{s}$ y $-\frac{V_{cc}}{s}$

a4) Sustituyendo por Thévenin la parte derecha



Con cualquiera de ellas, se llega a:

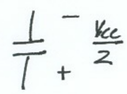
$$E(s) = \frac{V_1 - V_0}{s + 2/RC} - \frac{V_{cc}/2}{s} + \frac{V_{cc}/2}{s + 2/RC} \implies \boxed{e(t) = Y(t)\left[\left(V_1 - V_0 + \frac{V_{cc}}{2}\right)e^{-\frac{t}{2RC}} - \frac{V_{cc}}{2}\right]} \quad (\alpha)$$

o bien, directamente en el tiempo, aplicando $e = e_f + (e_i - e_f)e^{-t/\tau}$

con $e_f = -\frac{V_{cc}}{2}$ $\quad e_i = V_+ - V_0 \quad \tau = \frac{RC}{2}$

b) 1) Con S abierto y en regimen $\begin{cases} V_- = 0 \\ V_+ = -\frac{V_{cc}}{2} \end{cases}$ $\quad V_i = V_+ - V_- = -\frac{V_{cc}}{2} < 0 \implies \underline{V_0 = -V_{cc}}$

C está cargado así



2) Al cerrar S, V_- se pone a $-V_{cc}$, por debajo de $V_+ \implies V_i > 0 \implies \underline{V_0 = +V_{cc}}$

S se abre en seguida, con lo que V_- vuelve a 0.

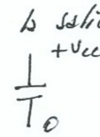
Queda el circuito de la parte a) con $V_1 = +V_{cc}$
$V_{c0} = -\frac{V_{cc}}{2}$

Por (α) $\boxed{v(t) = -\frac{V_{cc}}{2} + \left(V_{cc} + \frac{V_{cc}}{2} + \frac{V_{cc}}{2}\right)e^{-2t/RC} = -\frac{V_{cc}}{2} + 2V_{cc}\, e^{-2t/RC}}$

Esto vale mientras $V_+ = v(t) > V_- = 0$, o sea hasta que $v(t)$ se anula.

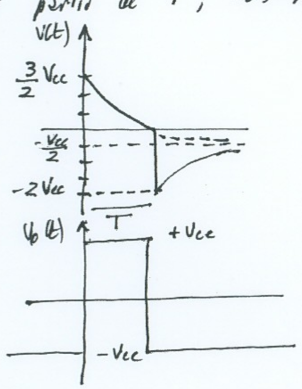
En ese instante, se da vuelta el operacional, y la salida salta a $-V_{cc}$ $\quad \underline{V_0 = -V_{cc}}$

En T^-, el capacitor estaba cargado así:



Aplico otra vez (α): $\boxed{v(t) = -\frac{V_{cc}}{2} + \left(-V_{cc} - V_{cc} + \frac{V_{cc}}{2}\right)e^{-2t'/RC} = -\frac{V_{cc}}{2} - \frac{3}{2}V_{cc}\, e^{-2t'/RC}}$

A partir de T, $v(t)$ queda siempre por debajo de 0, $V_i < 0$, $V_0 = -V_{cc}$



4) $-\frac{V_{cc}}{2} + 2V_{cc}\, e^{-2t/RC} = 0 \qquad 2e^{-x} = \frac{1}{2}$

$e^{-x} = \frac{1}{4} \qquad e^{x} = 4 \qquad x = \frac{2T}{RC} = Ln\, 4$

$RC = \frac{2T}{Ln\, 4} \qquad$ Para $T = 1 \implies RC = \frac{2}{Ln\, 4} \simeq 1{,}44$ seg

Sistemas Lineales 2 - Soluciones Primer Parcial

Problema 2.-

a) Intervalo $[0, T)$: El sistema evoluciona de acuerdo a $V = L\frac{di_L}{dt}$, entonces

$$i_L(t) = \frac{V}{L}\, t \ , \ t \in [0, T] \ ,$$
$$v_C(t) = 0 \ , \ t \in [0, T] \ .$$

Intervalo $[T, T_C)$: Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema son:

$$L\frac{di_L}{dt} + v_C = 0 \ , \ i_L = C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} \ .$$
$$\Longrightarrow \ \ddot{v}_C + 2\zeta\omega_0\dot{v}_C + \omega_0^2 v_C = 0 \ .$$

Entonces,

$$i_L(t) = \frac{VT}{L}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\zeta\omega_0\,(t-T)}\, \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,(t-T) \ + \ \arccos(\zeta)) \ , \ t \in [T, T_C] \ ,$$

$$v_C(t) = V(\omega_0 T)\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\zeta\omega_0\,(t-T)}\, \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,(t-T)) \ , \ t \in [T, T_C] \ ,$$

donde

$$T_C = T + \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}\,(\pi - \arccos(\zeta)) \ .$$

Así tenemos que

$$i_L(T_C) = 0 \ , \ v_C(T_C) = V(\omega_0 T)\, e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,(\pi - \arccos(\zeta))} \ .$$

Intervalo $[T_C, +\infty)$: El sistema evoluciona de acuerdo a $\dot{v}_C = -\frac{1}{RC}\, v_C$, entonces

$$i_L(t) = 0 \ , \ t \geq T_C$$
$$v_C(t) = V(\omega_0 T)\, e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,(\pi - \arccos(\zeta))}\, e^{-2\zeta\omega_0\,(t-T_C)} \ , \ t \geq T_C \ ;$$

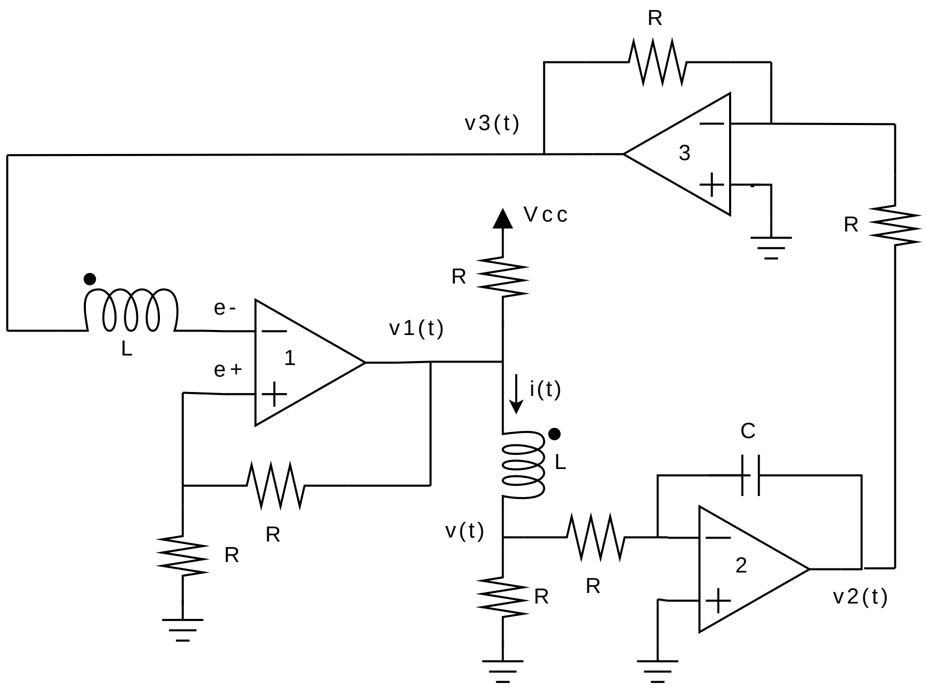
o equivalentemente

$$i_L(t) = 0 \ , \ t \geq T + \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}\,(\pi - \arccos(\zeta))$$
$$v_C(t) = V(\omega_0 T)\, e^{\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,(\pi - \arccos(\zeta))}\, e^{-2\zeta\omega_0\,(t-T)} \ , \ t \geq T + \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}\,(\pi - \arccos(\zeta)) \ .$$

c)

$$\int_0^{+\infty} \frac{v_C^2(t)}{R}\, dt \ = \ \frac{1}{2}L i_L^2(T) \ = \ \frac{1}{2}\frac{(VT)^2}{L} \ .$$

Considere el circuito de la figura. Los amplificadores operacionales son todos ideales. El operacional 1 funciona como comparador, en tanto el resto funciona en zona lineal. Las dos inductancias conforman un transformador perfecto. Se cumple que $RC = \frac{L}{R} = \tau$.



a) Partiendo de condiciones iniciales nulas y suponiendo que el comparador arranca en $+V_{CC}$, mostrar que existe un instante de tiempo en el que el comparador conmuta por primera vez.

b) Calcule las tensiones de salida de los tres operacionales en el tramo que va desde $t = 0$ hasta dicho instante.

Nota: debe verificar las hipótesis sobre el comparador y explicar **claramente** el análisis de los operacionales.

Solución:

Llamemos L_1 a la bobina conectada a e^- y L_2 a la bobina a la salida del operacional 1. Debido a la resistencia de entrada infinita del operacional 1, no circula corriente por L_1. Esto implica que la mutua solamente influye en un sentido.

Supongamos que $v_1(t) = +V_{CC}$. La caída en L_2 resulta ser:

$$v_1(t) - v(t) = L.\frac{di}{dt}(t)$$

pues la mutua no influye. Considerando la tierra virtual del operacional 2,

$$i(t) = \frac{v(t)}{R||R} = 2\frac{v(t)}{R}$$

Entonces:

$$v_1(t) - v(t) = \frac{2L}{R}.\frac{dv}{dt}(t) \Rightarrow v(t) = Y(t).V_{CC}.\left[1 - e^{-\frac{t}{2\tau}}\right]$$

(esto puede resolverse por Laplace, considerando que la bobina está inicialmente descargada).

El circuito que involucra al operacional 2 es una configuración inversora que, por las componentes que posee, implementa un integrador:

$$V_2(s) = -\frac{1}{RCs}V(s) \Rightarrow v_2(t) = -Y(t).V_{CC}.\left[\frac{t}{\tau} + 2.\left(e^{-\frac{t}{2\tau}} - 1\right)\right]$$

El operacional 3 está en una configuración inversora que simplemente cambia el signo de la entrada:

$$v_3(t) = -v_2(t) = Y(t).V_{CC}.\left[\frac{t}{\tau} + 2.\left(e^{-\frac{t}{2\tau}} - 1\right)\right]$$

Estamos en condiciones de calcular $e^-(t)$ y verificar la hipótesis del comparador. Como por la bobina L_1 no circula corriente, tenemos que

$$v_3(t) - e^-(t) = M.\frac{di}{dt}(t) = \frac{2L}{R}.\frac{dv}{dt}(t) = 2\tau.\frac{dv}{dt}(t)$$

donde hemos usado que el transformador es perfecto. Entonces

$$e^-(t) = v_3(t) - 2\tau.\frac{dv}{dt}(t) \Rightarrow e^-(t) = Y(t).V_{CC}.\left[\frac{t}{\tau} - 2 + e^{-\frac{t}{2\tau}}\right]$$

Como $e^+(t) = \frac{V_{CC}}{2}$, ya que es el punto medio de un divisor de tensión con resistencias iguales, tenemos que inicialmente $e^-(t) < e^+(t)$ y se verifica la hipótesis sobre el estado del comparador. Esto se cumple hasta el instante T en que

$$e^-(T) = e^+(T) \Rightarrow \frac{V_{CC}}{2} = V_{CC}. \left[\frac{T}{\tau} - 2 + e^{-\frac{T}{2\tau}}\right]$$

Observemos que $e^-(t)$ se inicia con un valor negativo y luego tiende a $+\infty$. La ecuación

$$\frac{5}{2} = \frac{T}{\tau} + e^{-\frac{T}{2\tau}}$$

muestra que existe un tiempo $T > 0$ en el cual el comparador conmuta por primera vez. Hasta ese instante, las salidas de los operacionales valen:

$$\begin{array}{rcl} v_1(t) & = & +V_{CC} \\ v_2(t) & = & -Y(t).V_{CC}. \left[\frac{t}{\tau} + 2. \left(e^{-\frac{t}{2\tau}} - 1\right)\right] \\ v_3(t) & = & Y(t).V_{CC}. \left[\frac{t}{\tau} + 2. \left(e^{-\frac{t}{2\tau}} - 1\right)\right] \end{array}$$

Solucion Problema 4, primer parcial de sistemas lineales 2, 2008

a)

La ecuación de mallas en la malla del motor nos da la siguiente ecuación:

$$(Ls+R)I+V_M=V_i$$

Ecuación 1: Malla

Las ecuaciones del motor dan lo siguiente:

$$T=\kappa . I \quad , \quad V_M=\kappa\,\Omega=\kappa\frac{sX}{r}$$

Ecuación 2: Ecuaciones del motor

Donde se usó la relación entre $\Omega=s\frac{X}{r}$ dada por $\dot{x}=r\omega$.

De la segunda cardinal obtenemos:

$$Js\,\Omega=T-r\,F(s) \;\Rightarrow\; Js^2\frac{X}{r}=\kappa\,I-r\,F(s)$$

Ecuación 3: Segunda Cardinal

Planteando la segunda ley de newton a la masa m:

$$m s^2 X=F(s)-k_1 X\Rightarrow F(s)=X\left(m s^2+k_1\right)$$

Sustituyendo F en Ecuación 3 queda:

$$Js^2\frac{X}{r}=\kappa\,I-r\left(X\left(m s^2+k_1\right)\right) \;\Rightarrow\; I=\frac{s^2\left(\frac{J}{r}+m\,r\right)+k_1 r}{\kappa}X$$

Ecuación 4:

Sustituyendo I de la Ecuación 4 y V_M de la Ecuación 2 en la Ecuación 1 obtenemos

$$V_i=(L s+R)\frac{s^2\left(\frac{J}{r}+m r\right)+k_1 r}{\kappa}X+\kappa\frac{s\,X}{r}=\left((Ls+R)\frac{J+m\,r^2}{r\,\kappa}s^2+\left(\frac{L\,k_1 r}{\kappa}+\frac{\kappa}{r}\right)s+\frac{k_1\,r\,R}{\kappa}\right)X$$

Entonces

$$H(s)=V_i\frac{(s)}{X}(s)=\frac{1}{(Ls+R)\frac{J+m\,r^2}{r\,\kappa}s^2+\left(\frac{L\,k_1 r}{\kappa}+\frac{\kappa}{r}\right)s+\frac{k_1\,r\,R}{\kappa}}$$

b)

Como todos los polos de H están a la izquierda del semi plano derecho y V_i solo tiene un polo simple en cero podemos usar el teorema del valor final para obtener x_F de la siguiente forma:

$$x_F=\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}s\,X(s)=\lim_{s\to 0}s\,H(s)\,V_i(s)=H(0)\lim_{s\to 0}s\,V_i(s)=H(0)\lim_{t\to\infty}v_i(t)=E\,.\,H(0)=\frac{\kappa\,E}{k_1 r\,R}$$