

# Solución del primer parcial de Sistemas Lineales 2 2007

## Ejercicio 4

9 de octubre de 2007

### Parte a.

La malla en el circuito queda

$$E = Ri_A(t) + v_M(t) = Ri_A(t) + K_M \omega(t) \Rightarrow \frac{E}{s} = RI_A(s) + K_M s X(s) \quad (1)$$

Ahora vemos la ecuación del sistema mecánico (2da ley de Newton):

$$M\ddot{x}(t) = -K_r x(t) + F_M \Rightarrow (Ms^2 + K_r) X(s) = F_M(s) = K_M I_A(s) \quad (2)$$

Despejando  $I_A$  en la ecuación 1 y sustituyendo en 2

$$(Ms^2 + K_r) X(s) = K_M \cdot \frac{\frac{E}{s} - K_M s X(s)}{R} \Rightarrow \left( Ms^2 + \frac{K_M^2}{R} s + K_r \right) X(s) = \frac{K_M}{R} \cdot \frac{E}{s} \quad (3)$$

Dividiendo entre M

$$\left( s^2 + \frac{K_M^2}{RM} s + \frac{K_r}{M} \right) X(s) = \frac{K_M}{RM} \cdot \frac{E}{s} \quad (4)$$

### Parte b.

Despejando X de 4

$$X(s) = \frac{K_M}{RM} \cdot \frac{E}{s} \frac{1}{\left( s^2 + \frac{K_M^2}{RM} s + \frac{K_r}{M} \right)} \quad (5)$$

Para que X tenga polos complejos conjugados:

$$K_M^4 < 4R^2 K_r M \quad (6)$$

### Parte c.

Llevamos X(s) a la forma:

$$X(s) = \frac{K_M}{RK_r} \cdot \frac{E}{s} \frac{\omega_0^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (7)$$

con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_r}{M}} \quad (8)$$

$$\zeta = \frac{K_M^2}{2RM\omega_n} = \frac{K_M^2}{2R\sqrt{MK_r}} \quad (9)$$

De las tablas de transformadas de Laplace:

$$x(t) = Y(t) \frac{EK_M}{RK_r} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \Phi) \right) \quad (10)$$

$$\Phi = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (11)$$

## Parte d.

Por la forma de  $x(t)$ , también se puede ver por el teorema del valor final a partir de  $X(s)$ , vemos que el límite de  $x(t)$  es

$$E \frac{K_M}{RK_r}$$

por lo tanto

$$E = 0,8 \frac{RK_r}{K_M} L$$

## Parte e.

Tenemos que hallar el primer máximo de  $x(t)$  Para ello hallamos su derivada y la anulamos, de la tabla de transformadas de Laplace tenemos la derivada, puesto que tenemos la antitransformada de  $sX(s)$ , y  $x(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = Y(t) \frac{EK_M}{RK_r} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \quad (12)$$

En la figura 1 vemos que se anula en cero, es decir que  $x(t)$  arranca con pendiente nula, y que el primer máximo se da cuando el argumento del  $\sin$  es  $\pi$ , es decir en

$$t_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Evaluamos  $x(t_M)$

$$x(t_M) = 0,8L \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\pi}{\tan(\Phi)}} \sin(\pi + \Phi) \right) = 0,8L \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\pi}{\tan(\Phi)}} \sin(\Phi) \right) = 0,8L \left( 1 + e^{-\frac{\pi}{\tan(\Phi)}} \right) < L \quad (13)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\pi}{\tan(\Phi)}} < 0,25 \Rightarrow \frac{\pi}{\tan(\Phi)} > \ln(4) \Rightarrow \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} > \ln(4) \quad (14)$$

$$\Rightarrow \zeta^2 > (1-\zeta^2) \left( \frac{\ln(4)}{\pi} \right)^2 = ,195(1-\zeta^2) \Rightarrow \zeta^2(1,195) > ,195 \Rightarrow \zeta > \sqrt{\frac{,195}{1,195}} \simeq 0,4 \quad (15)$$

Ahora hallamos  $R$  en función de  $\zeta$  a partir de la ecuación eq : zeta

$$R = \frac{K_M^2}{2\zeta\sqrt{MK_r}} < \frac{K_M^2}{0,8\sqrt{MK_r}} = 1,25 \frac{K_M^2}{\sqrt{MK_r}} \quad (16)$$

$$\Rightarrow R < 1,25 \frac{K_M^2}{\sqrt{MK_r}} \quad (17)$$

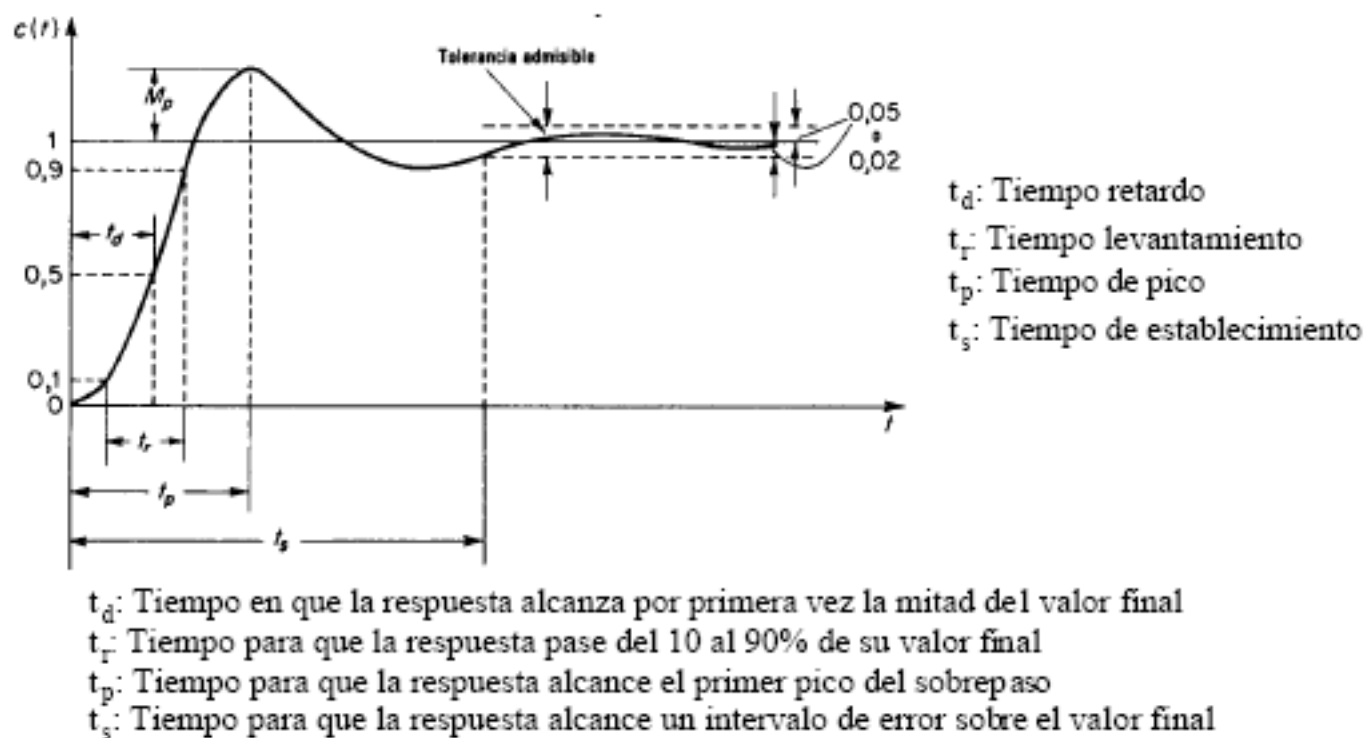


Figura 1: Respuesta temporal de un sistema de segundo orden