

Sistemas Lineales 2 - Soluciones Primer Parcial

Solución Problema 1.- La dinámica del circuito (que involucra la función v de nuestro interés) puede ser descripta via

$$\tau \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = v_S(t) ,$$

donde la función excitación v_S es

$$v_S(t) = \begin{cases} V , & t \in [0, \alpha T) \\ 0 , & t \in [\alpha T, T) \end{cases} ,$$

$$v_S(t + kT) = v_S(t) , \quad t \in [0, T) , \quad k \in \mathbb{N} .$$

- a) Calculemos ahora la solución, v en régimen estacionario, resolviendo de a tramos.

Intervalo $[0, \alpha T)$: Definiendo $V_0 = v(0)$ tenemos que

$$v(t) = (V_0 - V)e^{\frac{-t}{T}} + V , \quad t \in [0, \alpha T) .$$

Intervalo $[\alpha T, T)$: Usando $v(\alpha T)$ de la expresión anterior, tenemos que

$$v(t) = ((V_0 - V)e^{-\alpha} + V)e^{\frac{-(t-\alpha T)}{T}} , \quad t \in [\alpha T, T) .$$

Usando la ecuación $v(T) = V_0$ para calcular V_0 , obtenemos que

$$V_0 = V \frac{(e^\alpha - 1)}{(e - 1)} .$$

Así obtenemos, finalmente, la solución v (en régimen estacionario) que estamos buscando:

$$v(t) = \begin{cases} V \left(\frac{(e^\alpha - 1)}{(e - 1)} e^{\frac{-t}{T}} + 1 - e^{\frac{-t}{T}} \right) , & t \in [0, \alpha T) \\ V \frac{(e^\alpha - 1)}{(e - 1)} e^{(1-\alpha)} e^{\frac{-(t-\alpha T)}{T}} , & t \in [\alpha T, T) \end{cases} ,$$

$$v(t + kT) = v(t) , \quad t \in [0, T) , \quad k \in \mathbb{N} .$$

- b)** Notemos que $v(0) = V_0 = V \frac{(e^\alpha - 1)}{(e - 1)} < V$, y que en el intervalo $(0, \alpha T)$ la función v es estrictamente creciente. En efecto,

$$\dot{v}(t) = \frac{V}{T} \left(1 - \frac{(e^\alpha - 1)}{(e - 1)} \right) e^{\frac{-t}{T}} > 0, \quad t \in (0, \alpha T).$$

Observemos también que $v(\alpha T) = V \frac{(e^\alpha - 1)}{(e - 1)} e^{(1-\alpha)}$, y que en el intervalo $(\alpha T, T)$ se verifica que

$$\dot{v}(t) = \frac{-V}{T} \frac{(e^\alpha - 1)}{(e - 1)} e^{(1-\alpha)} e^{\frac{-(t-\alpha T)}{T}} < 0, \quad t \in (\alpha T, T),$$

lo cual implica que en dicho intervalo la función v es estrictamente decreciente.

Con estas observaciones es ahora simple graficar la función v en el intervalo $[0, T]$.

- c)** De las observaciones de la parte **(b)** deducimos que

$$v_{\min} = v(0) = V \frac{(e^\alpha - 1)}{(e - 1)},$$

$$v_{\max} = v(\alpha T) = V \frac{(e^\alpha - 1)}{(e - 1)} e^{(1-\alpha)}.$$

Además también tenemos que

$$\frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_S(t) dt = \alpha V.$$