Sistemas Lineales 2
Primer parcial - jueves, 05 de octubre de 2006

Te solicitamos:

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los Problemas.
- utilizar las hojas de un solo lado.
- resolver problemas diferentes en hojas separadas.
- al finalizar la prueba, **colocar las hojas dentro del sobre**, depositar el mismo sobre el banco y retirarse del salón.
- **NO ESCRIBIR NI RAYAR EL SOBRE**, ya que será re-utilizado.

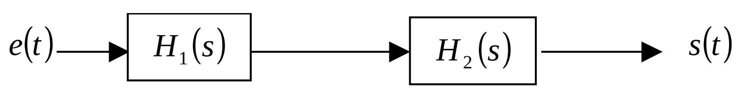
Se recuerda que la prueba es individual y **dura 4 horas**.
Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

Problema 1 (5 puntos)

a) Probar que en distribuciones vale lo siguiente: L(f*g)= L(f)L(g)
b) Probar que la transferencia en Laplace de dos bloques como los de la figura es el producto de las transferencias.

c) Hallar la respuesta al impulso $h_2(t)$ sabiendo que e(t)=Y(t), s(t)=Y(t-T)sen(t-T) y $H_1(s) = \frac{s}{s^2+1}$.

d) Identificar el bloque H_2.



Problema 2 (10 puntos)

a) Escribir en Laplace las ecuaciones del transformador, con datos previos no nulos:

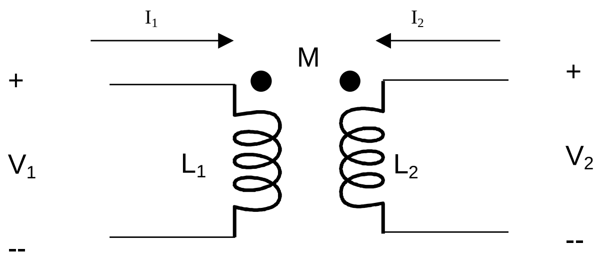


Figura 1

b) En el circuito de la figura 2, hallar el voltaje de salida en régimen $v_o(t)$ y la caída de voltaje $v_f(t)$ en bornes de la fuente de corriente. La fuente de corriente es el diente de sierra de la figura 3.
Se sabe que las dos autoinductancias son iguales, que el transformador es perfecto y que L/R = T. Las expresiones temporales deben estar dadas en función de R, T e I_0.

c) Sabiendo que T = 1s, R = 1Ω, I_0=1A, graficar los voltajes calculados en la parte anterior, indicando claramente los valores al comienzo y final del período. Dichos valores deben ser expresados numéricamente.

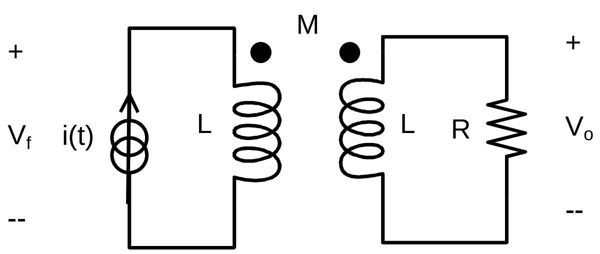


Figura 2

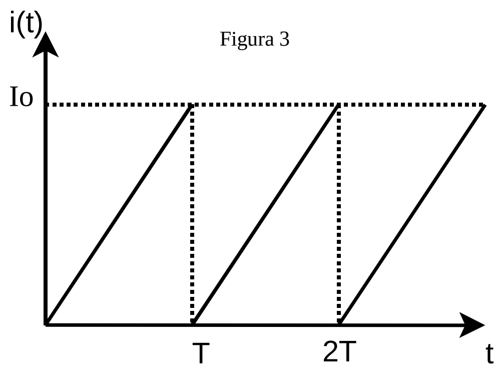
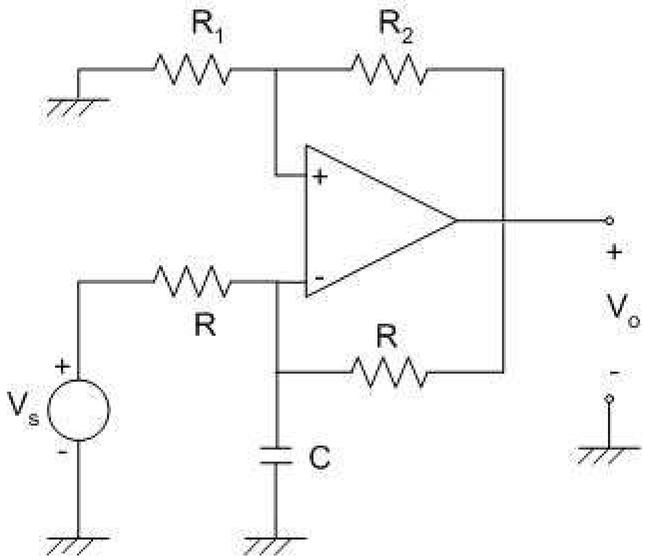


Figura 3

Problema 3 (8 puntos)

En el circuito de la figura, el operacional es ideal.

1) Calcular la transferencia $G(s) = \frac{V_o}{V_s}$ y la impedancia $Z_v(s)$ vista por la fuente V_s, en función de R, C, y $\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$
2) Hallar la condición para que el circuito sea un integrador perfecto. Cumpliéndose esa condición, probar que la impedancia vista $Z_v(s)$ se puede considerar como serie de R y un paralelo de un condensador y una impedancia real constante.



Problema 4 (12 puntos)

Nota: los operacionales son ideales con A = ∞, R_i = ∞, R_0 = 0 y están alimentados a $\pm V_{cc}$

a) En el circuito de la Figura 1, calcular y dibujar $V_c(t)$ y $V_0(t)$ para $V_i = \frac{V_{cc}}{4} Y(t)$ y $V_i = -\frac{V_{cc}}{4} Y(t)$. El condensador está inicialmente descargado.

b) En el circuito de la Figura 2 calcular y graficar $V_c(t)$ y $V_0(t)$, si V_i es la que se muestra en la Figura 3. Se cumple que $T = \frac{RC}{2} \ln\left(\frac{6}{5}\right)$, y el condensador está inicialmente descargado.

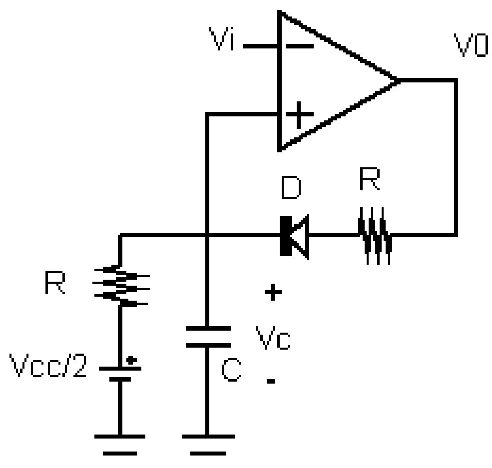


Figura 1

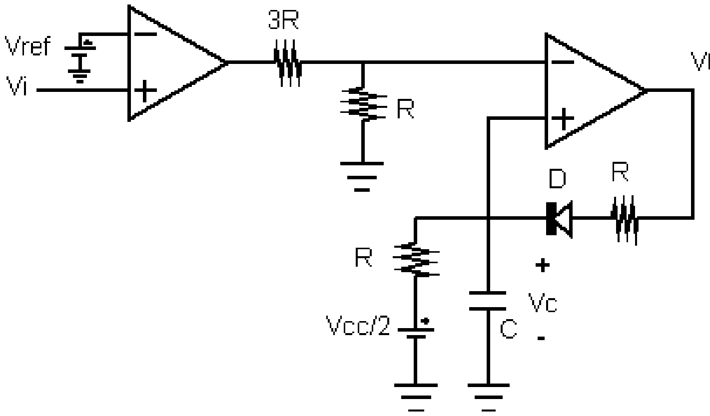


Figura 1

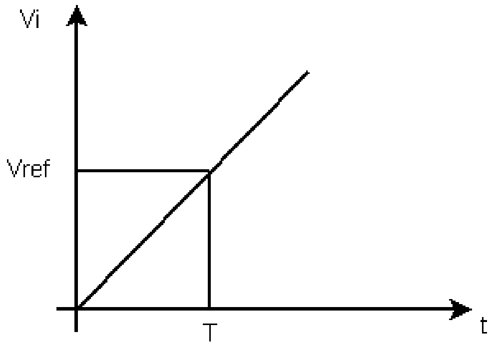


Figura 2

c) Indicar alguna posible aplicación del circuito de la parte (b)

Problema 5 (5 puntos)

Consideremos un sistema lineal de transferencia real racional estrictamente propia $H(s)=\frac{s+a}{(s+b)^2}$, con a, y b reales pero no conocidos.

a) Hallar la respuesta del sistema a un escalón unitario.

b) Se sabe que para la entrada *e(t)=Y(t)* (escalón unitario) el sistema dado responde con una respuesta *r(t)* acotada. Dado lo que se conoce del sistema, ¿alcanza con este dato para determinar la estabilidad BIBO del sistema? **JUSTIFICAR**

c) ¿Este resultado se generaliza a cualquier transferencia real racional estrictamente propia?, es decir ¿alcanza con que la respuesta al escalón sea acotada para determinar la estabilidad de un sistema lineal de transferencia real racional estrictamente propia? J**USTIFICAR** (por la afirmativa o mediante un contraejemplo).

EJERCICIO 1)

a) $\mathcal{L}(f*g)(s) = \langle f*g(t), e^{-st} \rangle = \langle f_x \otimes g_y, e^{-s(x+y)} \rangle =$

$= \langle f_x \otimes g_y, e^{-sx} \cdot e^{-sy} \rangle \underset{\uparrow}{=} \langle f_x, e^{-sx} \rangle \langle g_y, e^{-sy} \rangle = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)$

propiedad $\otimes$

b) $e \longrightarrow \boxed{h_1} \xrightarrow{\;e'\;} \boxed{h_2} \longrightarrow s$

Si h_1 y h_2 son las respuestas al impulso y e la entrada

$\Rightarrow$ $e' = h_1 * e$ y $s = h_2 * e'$ donde s es la salida

$\Rightarrow$ $s = h_2 * (h_1 * e)$ $\Rightarrow$ por asociativa de $*$ $\Rightarrow$ $s = (h_2 * h_1) * e$

$\Rightarrow$ la respuesta al impulso del sistema es $h_2 * h_1$ y usando la parte anterior vemos que la transferencia es el producto de las transferencias.

c) $e(t) \longrightarrow \boxed{H_1(s)} \longrightarrow \boxed{H_2(s)} \longrightarrow s(t)$

$e(t) = Y(t)$ $\quad s(t) = Y(t-T)\operatorname{sen}(t-T)$

$\Rightarrow \dfrac{S(s)}{E(s)} = \dfrac{s}{s^2+1} e^{-sT} \overset{\text{parte b)}}{\Longrightarrow} H_2(s) = e^{-sT}$ $\quad \Rightarrow h_2(t) = \delta(t-T)$

d) H_2 es un retardo.

Problema 2

Andrés Alcarraz

7 de octubre de 2006

1. Parte a.

Las ecuaciones que relacionan los voltajes con las corrientes en el tiempo son:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ v_2(t) &= M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{1}$$

Usando la propiedad de derivación en el tiempo: $\mathbf{L}\{f'\}(s) = s\mathbf{L}\{f\}(s) - f(0)$ las ecuaciones de (1) quedan:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= L_1 s I_1 + M s I_2 - L i_{10} - M i_{20} \\ V_2(s) &= M s I_1 + L_2 s I_2 - M i_{10} - L_2 i_{20} \end{aligned} \tag{2}$$

2. Parte b.

Como la excitación es de período T y el sistema es lineal, podemos asegurar que la solución en régimen también será del mismo período.

Sabiendo esto, se puede afirmar que en régimen el dato previo al comienzo de un período debe ser igual al dato previo al comienzo del período siguiente. Entonces para resolver el problema suponemos un dato previo para las corrientes en un período e imponemos que al final del mismo los valores de las corrientes por las bobinas del transformador sean iguales a los datos previos.

Como la corriente por el primario está dada por la fuente sobre esta no tenemos que imponer nada porque esta condición ya está dada por la misma. Para el secundario asumimos que la corriente es i_{20}, para el primario sabemos que es I_0.

Al resolver la malla 2 tenemos $L(I_0 + i_{20}) = R.I_2 + Ls(I_1 + I_2)$ pero sabemos que $I_1 = \frac{I_0}{Ts^2}$, así que podemos despejar I_2 en función de I_1 y el resto de los parámetros.

$I_2 = L\frac{I_0 + i_{20} - s.I_1}{Ls+R} = \frac{I_0 + I_{20} - \frac{I_0}{Ts}}{s+\frac{1}{T}} = \frac{s(I_0 + I_{20}) - \frac{I_0}{T}}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{T}}$

Por el método de la tapadita hallamos A y B: $A = -I_0$, $B = 2I_0 + I_{20}$ antitransformando obtenemos $i_2(t) = (2I_0 + i_{20})\, e^{\frac{-t}{T}} - I_0$ Aún falta determinar

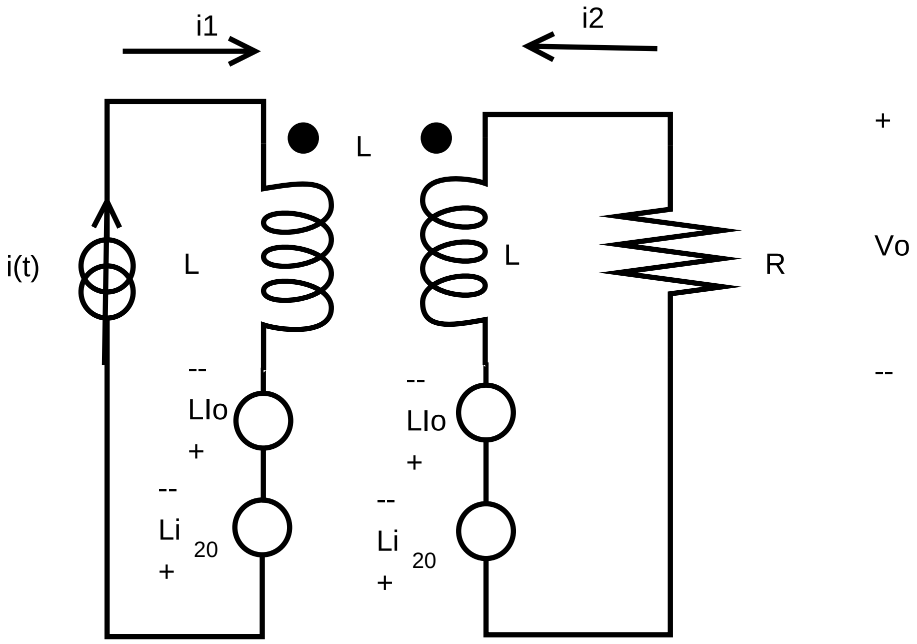


Figura 1: circuito en laplace

i_{20} esto lo hacemos imponiendo que $i_2(T) = i_{20} \Rightarrow i_{20} = (2I_0 + i_{20})\, e^{-1} - I_0$
Despejando:

$$i_{20} = I_0 \frac{2e^{-1} - 1}{1 - e^{-1}} = -I_o \frac{e-2}{e-1} \simeq -,4I_0 \tag{3}$$

Ahora que tenemos plenamente hallado i_2 podemos calcular v_o por la ley de Ohm

$$v_o(t) = -R.i_2 = -R.I_0.\left(\left(2 - \frac{e-2}{e-1}\right)e^{\frac{-t}{T}} - 1\right) = -R.I_0.\left(\frac{e}{e-1}e^{-t/T} - 1\right) \tag{4}$$

De las ecuaciones del transformador perfecto sabemos que $\frac{v_o}{v_f} = L_2/L_1 = 1$ o sea que v_o y v_f son iguales.

Para calcular v_f usamos la malla del primario:

$$\begin{aligned}
V_f(s) = Ls(I_2 + I_1) - L(I_0 + i_{20}) = L(s.I_2 + s.I_1 - I_0 - I_{20}) = \\
= L\left(\frac{s(I_0 + I_{20}) - I_0/T}{s + 1/T} + \frac{I_0}{Ts} - (I_0 + I_{20})\right) \\
= L\left(\frac{\underline{s(I_0 + I_{20})} - (I_0 + I_{20})\left(\underline{s} + 1/T\right) - I_0/T}{s + 1/T} + \frac{I_0}{Ts}\right)
\end{aligned}$$

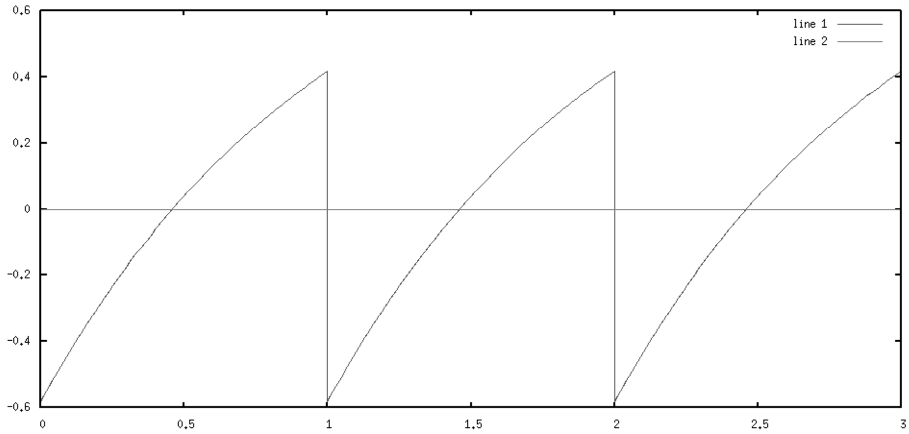


Figura 2: $v_o\left(t\right)$

$$= \frac{L}{T}\left(-\frac{2I_0+I_{20}}{s+1/T}+\frac{I_0}{s}\right) = R.I_0\left(\frac{1}{s}-\frac{e}{e-1}\frac{1}{s+1/T}\right) \tag{5}$$

anti transformando:

$$v_f\left(t\right) = R.I_0\left(1-\frac{e}{e-1}e^{-t/T}\right) \tag{6}$$

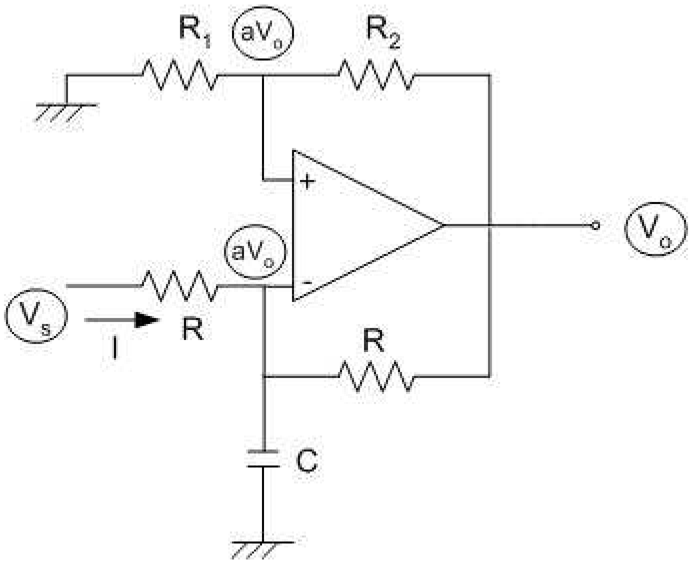
Que es lo mismo que valía $v_o\left(t\right)$

3. Parte c.

Ahora resta evaluar los voltajes en t=T sustituyendo los parámetros por los valores dados.

$$v_o\left(0^+\right) = -1V\left(\frac{e}{e-1}-1\right) = -0{,}58V v_o\left(T^-\right) = -1V\left(\frac{1}{e-1}-1\right) = 0{,}42V \tag{7}$$

Problema 3



1)

KCL en el nudo - : $$\frac{V_s - \alpha V_o}{R} = Cs\alpha V_o + \frac{(\alpha-1)V_o}{R}$$

$$V_s - \alpha V_o = \alpha RCsV_o + (\alpha-1)V_o$$
$$V_s = [\alpha RCs + (2\alpha - 1)]V_o \Rightarrow$$

$$\boxed{G = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1}{\alpha RCs + 2\alpha - 1}}$$

$$I = \frac{V_s - \alpha V_o}{R} = \frac{V_s - \alpha G V_s}{R} = \frac{(1-\alpha G)V_s}{R}$$

$$Z_v = \frac{V_s}{I} = \frac{R}{1-\alpha G} = \frac{R}{1 - \frac{\alpha}{\alpha RCs + 2\alpha - 1}} = R\frac{\alpha RCs + 2\alpha - 1}{\alpha RCs + \alpha - 1}$$

2)

Para que sea un integrador perfecto: $2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

3)

$$Z_v = R\frac{\frac{RC}{2}s}{\frac{RC}{2}s - \frac{1}{2}} = R\frac{RCs}{RCs-1} = R\frac{RCs-1+1}{RCs-1} = R\left[1 + \frac{1}{RCs-1}\right] = R + \frac{R}{RCs-1}$$

El paralelo de R_x y C_x es $\dfrac{R_x \dfrac{1}{C_x s}}{R_x + \dfrac{1}{C_x s}} = \dfrac{R_x}{R_x C_x s + 1} \Rightarrow \boxed{C_x = C} \quad \boxed{R_x = -R}$

Solución Problema 4

a) En el circuito de la Figura 1, calcular y dibujar $V_c(t)$ y $V_0(t)$ para $V_i = \frac{V_{cc}}{4}Y(t)$ y $V_i = -\frac{V_{cc}}{4}Y(t)$. El condensador está inicialmente descargado.

Solución

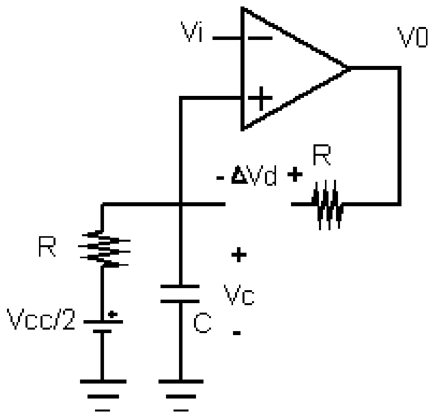
El operacional trabaja en saturación, debido a la realimentación positiva, además en el instante inicial $V_+ \neq V_-$ lo que hace que el operacional sture (A = ∞). Por lo tanto las posibles salidas del operacional son $\pm V_{cc}$

- Primero analizamos $V_i = \frac{V_{cc}}{4}Y(t)$

<u>Tramo 1</u>

Hipótesis: i) D off, entonces $I_D = 0$
ii) Vo = -Vcc

El circuito queda:



Calculamos Vc, para ello aplicamos la fórmula de carga y descarga de un capacitor :

$$Vc = Vf + (Vi - Vf)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Con Vi = 0, Vf = $V_{cc}/2$, y τ = RC:

$$Vc = \frac{V_{cc}}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)Y(t)$$

Verificación de las hipótesis:

i)

$$\Delta Vd = V0 - Vc = -\left(V_{cc} + \frac{V_{cc}}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right)Y(t) < 0, \forall t \geq 0$$

Por lo que se verifica la hipótesis

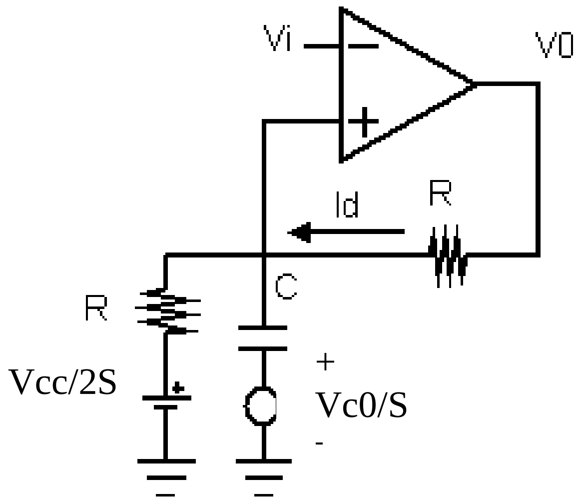
ii) V0 = $-V_{cc}$ mientras $V_+ < V_-$, o sea mientras Vc < Vcc/4, esto es así hasta un tiempo t_0 tal que:

$$Vc = \frac{V_{cc}}{2}\left(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}\right) = \frac{V_{cc}}{4}$$

Entonces t_0 =RCln2. Por lo que la hipótesis vale hasta t_0, luego el A.O. cambia de estado.

Tramo 2

Hipótesis: i) D on, entonces $\Delta V_D = 0$
ii) Vo = +Vcc
El circuito en Laplace queda:



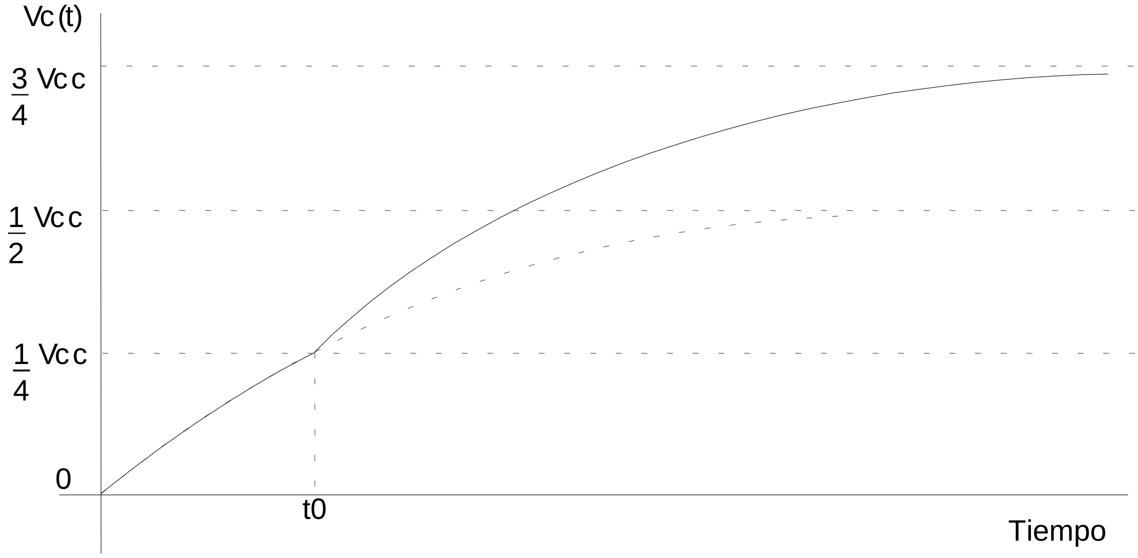
El dato previo en el condensador es Vc0 = $V_{cc}/4$
Calculamos Vc, para ello aplicamos la fórmula de carga y descarga de un capacitor, con Vi = $V_{cc}/4$, Vf = $3V_{cc}/4$, y τ = RC/2:

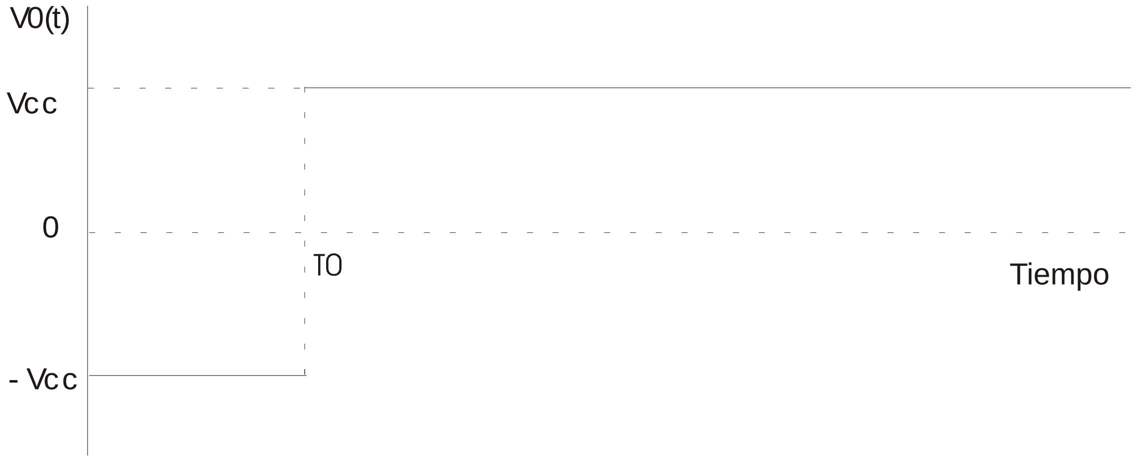
$$Vc = \frac{V_{cc}}{2}\left(\frac{3}{2} - e^{-\frac{2t'}{RC}}\right)Y(t'), \text{Donde } t' = t - t_0$$

Verificación de las hipótesis:
i)

$$Id = \frac{V0 - Vc}{R} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-\frac{2t'}{RC}}\right)\frac{V_{cc}}{R}Y(t') > 0, \forall t' \geq 0$$

Verifica la hipótesis
ii) Vcc/4 = $V_- < V_+$ = Vc para todo t' ≥ 0, Provocando que la salida del A.O. sea +Vcc, quedando el circuito indefinidamente en ese estado.
Gráficamente:

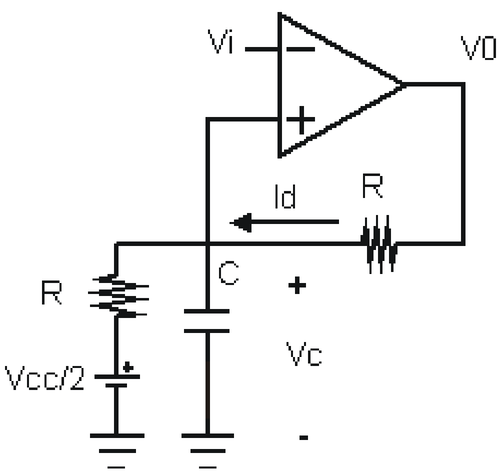




- Ahora analizamos $V_i = -\frac{V_{cc}}{4} Y(t)$

Hipótesis: i) D on, entonces $\Delta V_D = 0$
ii) Vo = +Vcc

El circuito en Laplace queda:



Vc es la carga de un capacitor, entre Vc = 0 y Vc = 3Vcc/4, con constante de tiempo RC/2:

$$Vc = \frac{3}{4}V_{cc}\left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right)Y(t)$$

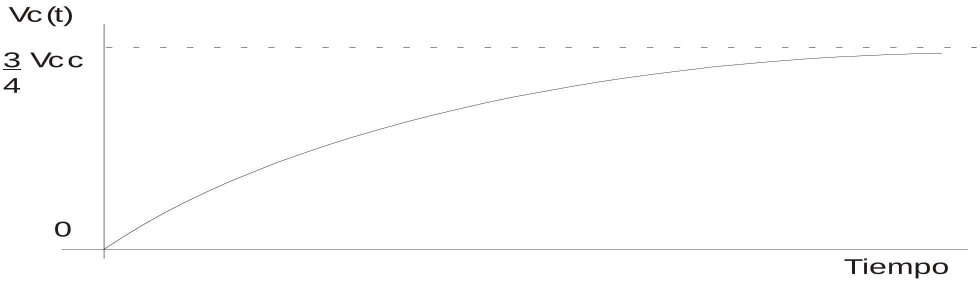
Verificación de las hipótesis:
i)

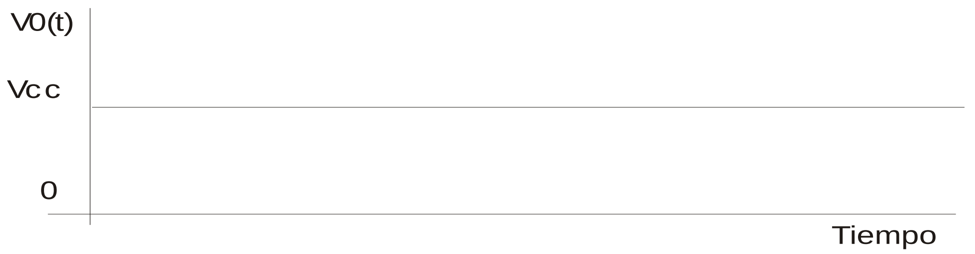
$$Id = \frac{V0 - Vc}{R} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-\frac{2t'}{RC}}\right)\frac{V_{cc}}{R}Y(t') > 0, \forall t' \geq 0$$

Verifica la hipótesis

ii) $-Vcc/4 = V_- < V_+ = Vc$ para todo t' ≥ 0, Provocando que la salida del A.O. sea +Vcc, quedando el circuito indefinidamente en ese estado.

Gráficamente:

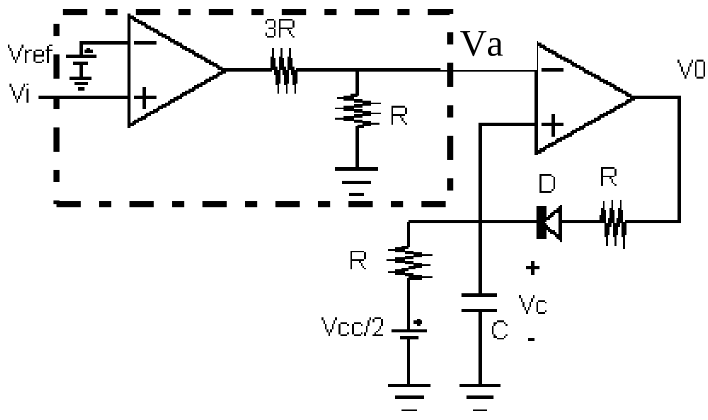




b) En el circuito de la Figura 2 calcular y graficar $V_c(t)$ y $V_0(t)$, si V_i es la que se muestra en la Figura 3. Se cumple que $T = \frac{RC}{2}\ln\left(\frac{6}{5}\right)$. Inicialmente el condensador está descargado.

Solución

La salida del bloque encerrado por la línea punteada Va es $-V_{cc}/4$ cuando Vi < V_{ref}, y



$+V_{cc}/4$ cuando $Vi>V_{ref}$. El resto del circuito es el mismo de la parte (a).
Por lo que podemos aprovechar los resultados obtenidos en la parte anterior.

<u>Tramo 1</u> $0 \leq t \leq T$

La salida del primer bloque es $Va = -V_{cc}/4$. Tomando esto como entrada al segundo bloque, tenemos un caso igual al último analizado en la parte a, obteniéndose:

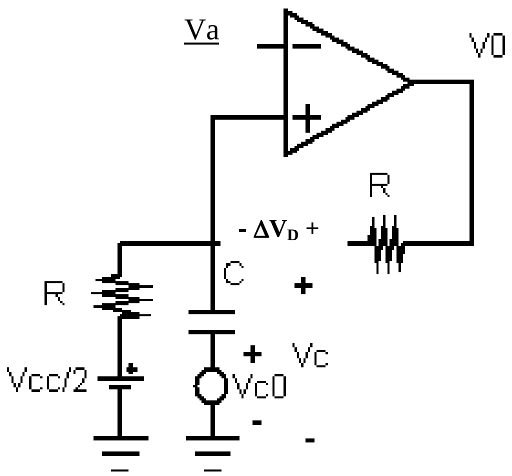
$$V0 = +V_{cc}$$

$$Vc = \frac{3}{4}V_{cc}\left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right)Y(t)$$

Para todo el tramo.
Las verificaciones del diodo y el A.O. están hechas en la parte (a).

<u>Tramo 2</u> $T < t \leq t_0$

- $Va = +V_{cc}/4$,
- Hipótesis:
  i) Diodo off, entonces Id = 0
  ii) $V0 = -V_{cc}$
- el circuito para el segundo bloque queda:



Es similar al primer caso estudiado en la parte (a), pero ahora el condensador tiene dato previo diferente de cero:
$Vc0 = Vc(T) = V_{cc}/8$

Aplicando nuevamente la fórmula para la carga y descarga de un condensador, tomando como $Vc_{inicial} = V_{cc}/8$, $Vc_{final} = V_{cc}/2$, y constante de tiempo RC, se obtiene:

$$Vc = \frac{V_{cc}}{2}\left(1 - \frac{3}{4}e^{-\frac{t'}{RC}}\right)Y(t')$$

Donde $t' = t - T$
Verificación de las hipótesis:

i) $$\Delta V_D = V0 - Vc = -\left(1 - \frac{1}{4}e^{-\frac{t'}{RC}}\right)\frac{3}{2}VccY(t') < 0, \forall t' \geq 0$$

Lo que verifica la hipótesis

ii) $V0 = -V_{cc}$ mientras $V_+ < V_-$, o sea mientras $Vc < Vcc/4$, esto es así hasta un tiempo t'_0 tal que:

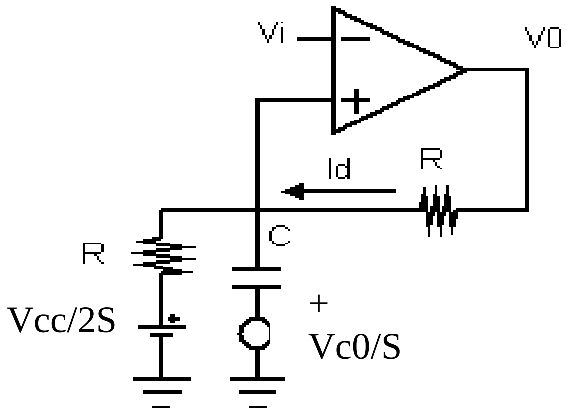
$$Vc = \frac{V_{cc}}{2}\left(1 - e^{-\frac{t_0'}{RC}}\right) = \frac{V_{cc}}{4}$$

Entonces t'_0 =RCln(3/2). Por lo que la hipótesis vale hasta t'_0,o lo que es lo mismo hasta $t_0 = t'_0 + T$ = RCln(54/25), luego el A.O. cambia de estado.

<u>Tramo 3</u> $t > t_0$

- Va = $+V_{cc}/4$,
- Hipótesis: i) D on, entontes $\Delta V_D = 0$
  ii) Vo = +Vcc

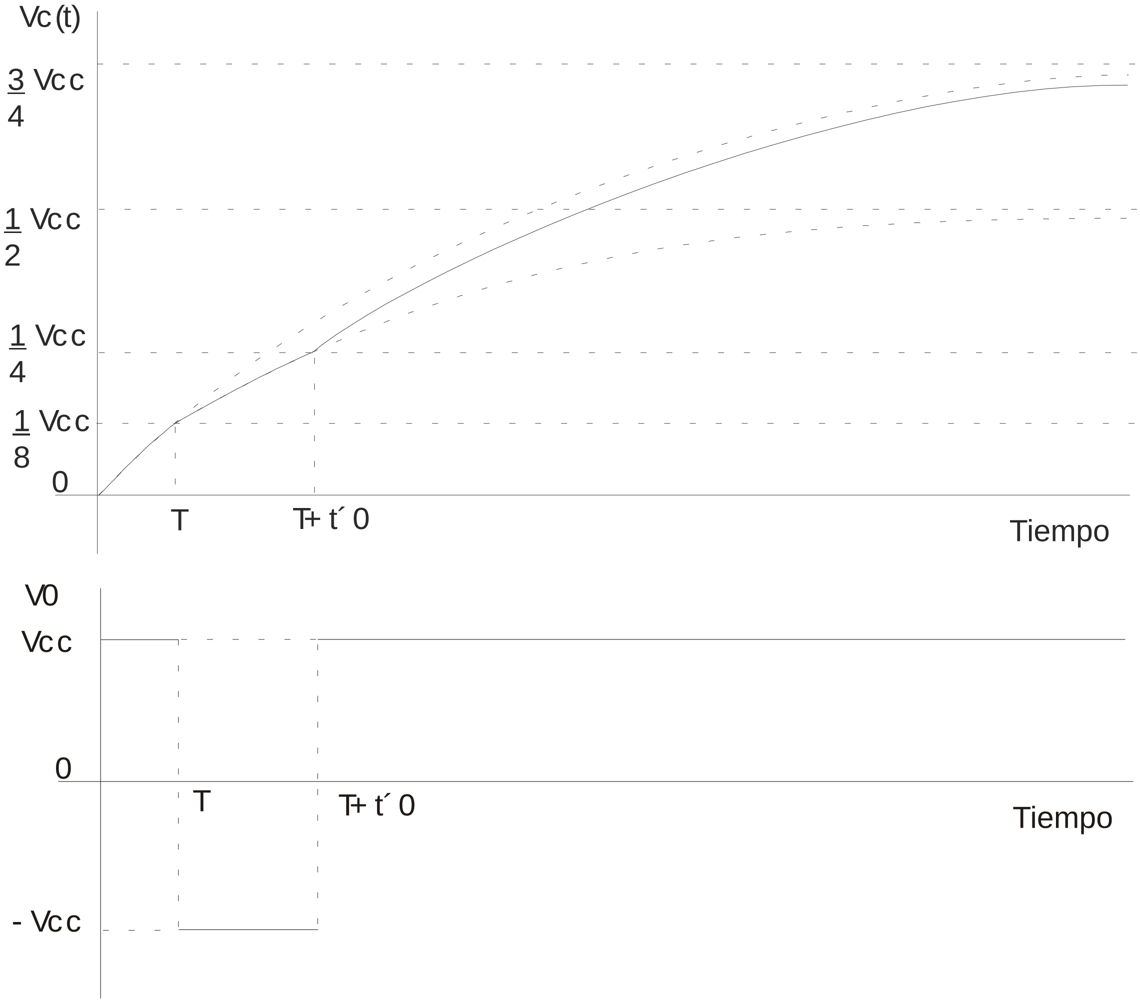
El circuito en Laplace queda:



Donde Vc0 = $V_{cc}/4$
Es igual al tramo 2 d ela parte (a), por lo que se verifican las hipótesis para todo $t > t_0$.
Entonces:

$$Vc = \frac{V_{cc}}{2}\left(\frac{3}{2} - e^{-\frac{2t'}{RC}}\right)Y(t'), \text{Donde } t' = t - t_0$$

Gráficamente



c) Este circuito da un pulso en la salida (V0) cuando la señal de entrada (Vi) sobrepasa a V_{ref}.

Podría servir como entrada a un circuito digital que sensara que Vi sobrepase cierto nivel, y requiriera un pulso como señal de entrada, en este caso se estaría utilizando el circuito como sensor de nivel (a esto lo realiza el comparador del primer bloque), y acondicionador de señal (a esto lo realiza el segundo bloque), al transformar la señal del comparador en un pulso, cuando Vi sobrepasa a V_{ref}.

Problema 5

Andrés Alcarraz

7 de octubre de 2006

1. Parte a.

En Laplace la respuesta será:

$$R(s) = \frac{1}{s}H(s) = \frac{s+a}{s(s+b)^2} \tag{1}$$

Por fracciones simples podemos escribir $R(s)$ de la siguiente forma:

$$R(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+b} + \frac{C}{(s+b)^2} \tag{2}$$

Por el método de la tapadita podemos hallar A y C

$$A = \frac{a}{b^2} \tag{3}$$

$$C = \frac{a-b}{-b} = 1 - \frac{a}{b} \tag{4}$$

Para hallar B podemos multiplicar por $s+b$ y hacer tender s a infinito

$$\lim_{s\to\infty} R(s)(s+b) = A + B \tag{5}$$

$$\lim_{s\to\infty} R(s)(s+b) = \lim_{s\to\infty} \frac{s+a}{(s+b)} = 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A = -\frac{a}{b^2} \tag{7}$$

Ahora podemos hallar la respuesta en el tiempo $r(t)$ antitransformando cada uno de los términos de las fracciones simples:

$$R(s) = \frac{a}{b^2 s} - \frac{a}{b^2(s+b)} + \frac{b-a}{b(s+b)^2} \tag{8}$$

$$r(t) = \frac{Y(t)}{b}\left(\frac{a}{b} + \left((b-a)t - \frac{a}{b}\right)e^{-b.t}\right) \tag{9}$$

2. Parte b.

Como se sabe que la respuesta del sistema al escalón, que es la hallada en la parte anterior, es acotada, podemos afirmar que $b < 0$ de lo contrario $\lim_{t\to\infty} r\left(t\right) = \infty$, por lo tanto el sistema es de transferencia racional real estrictamente propia con todos sus polos a la izquierda del eje imaginario. El teorema de estabilidad para transferencias de este tipo nos dice que es condición necesaria y suficiente que todos los polos de la transferencia estén a la izquierda (estrictamente) del eje imaginario para que el sistema sea estable, por lo tanto podemos afirmar que el sistema es estable.

3. Parte c.

Para responder esta pregunta hay que ver si para cualquier transferencia racional real estrictamente propia podemos afirmar que es estable [1] dado que sabemos que la respuesta al escalón es acotada. En principio no hay ningún teorema que nos permita afirmar esto, pero es fácil ver que la respuesta al impulso es la derivada de la respuesta al escalón, dado que en laplace la respuesta al impulso es $H(s)$ y la respuesta al escalón es $\frac{H(s)}{s}$ Esto nos permitiría afirmar que si $\int 0th(u)\mathrm{d}u$ es acotada el sistema es estable, siempre que $h(t)$ sea una función, pero sabemos que esto no pasa cuando la respuesta al impulso $h(t)$ es una sinusoide, pues su integral es acotada pero su transferencia es $H(s) = \frac{1}{s^2+1}$ que sabemos que es inestable por el teorema de estabilidad para distribuciones (la condición de que los polos estén a la izquierda siempre es necesaria), por lo tanto llegamos a un absurdo.

Otra forma de resolver este ejercicio es observar que la respuesta al escalón de un sistema de transferencia $H(s) = \frac{s}{s^2+1}$ es $R(s) = \frac{1}{s^2+1}$ que en el tiempo es $r(t) = Y(t)\sin(t)$ y es acotado, sin embargo sabemos que un sistema de dicha transferencia es inestable, por lo tanto dicho sistema es un contraejemplo.

[1] En realidad cuando decimos que una transferencia es estable estamos refiriéndonos a un sistema que tiene dicha transferencia