Sistemas Lineales 2
Primer parcial, 5 de octubre 2005

Te solicitamos:

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- utilizar las hojas de un solo lado.
- resolver problemas diferentes en hojas separadas.
- al finalizar la prueba, **colocar las hojas dentro del sobre**, entregar el sobre y retirarse del salón.
- **NO ESCRIBIR NI RAYAR EL SOBRE**, ya que será re-utilizado.

Se recuerda que la prueba es individual y **dura 4 horas**.
Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

Problema 1 (10 puntos)

En el circuito de la figura 1, el amplificador operacional es ideal y trabaja como comparador entre niveles ±Vcc.

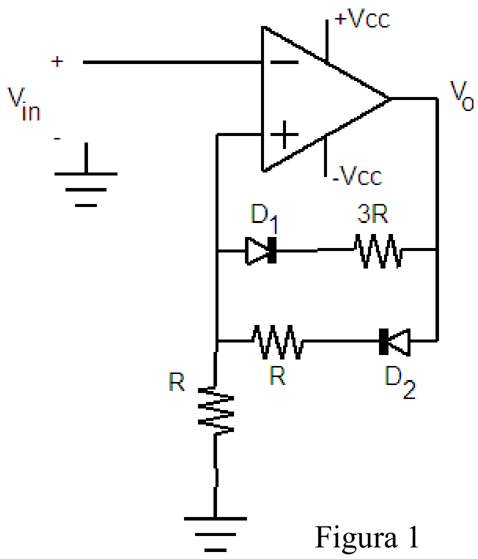


Figura 1

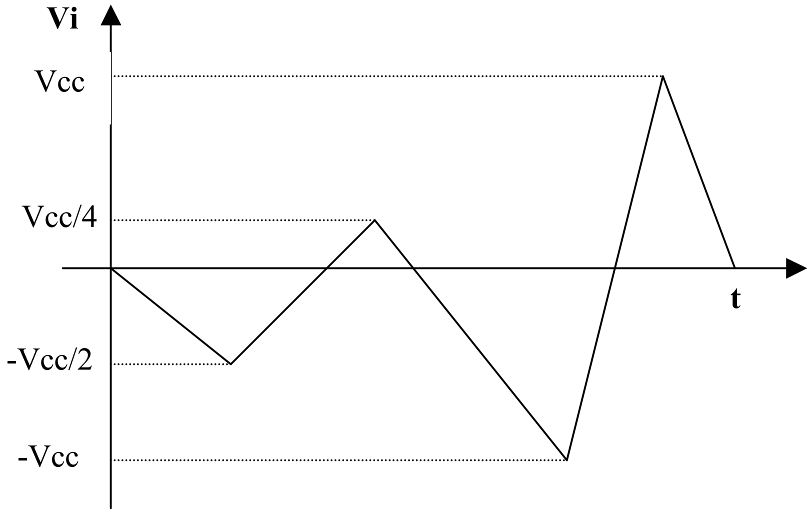


Figura 2

a) Hallar y graficar la relación Vo(Vi) para todo el rango de entradas. Realizar primero el análisis para valores crecientes de Vi (desde valores negativos pequeños hasta aquellos positivos muy grandes) y completar el estudio para valores decrecientes de Vi. **Justifique claramente su forma de trabajo con las componentes no lineales involucradas.**

b) ¿Cuál es el ancho de la ventana de disparo?

c) Graficar la salida para la entrada de la figura 2. Indicar los valores notables y **las suposiciones que deba realizar**.

d) Indique el valor de la fuente de voltaje que agregaría y cómo la conectaría para obtener una ventana de disparo simétrica respecto a Vi=0.

Problema 2 (6 puntos)

La respuesta al impulso de un cierto sistema lineal *H* es la función *h(t)* indicada en la figura 1.

a) Hallar y **dibujar** la respuesta *r(t)* de ese sistema a la entrada *e(t)* de la figura 2, indicando los instantes en los que *r(t)* se anula.

b) Se alimenta con *r(t)* un sistema diferenciador ideal, obteniendo una respuesta *f(t)*. Dibujar *f(t)*.

c) Indicar qué entrada *g(t)* deberá aplicarse al sistema original *H* para que su respuesta sea idéntica a *f(t)*. Justificar.

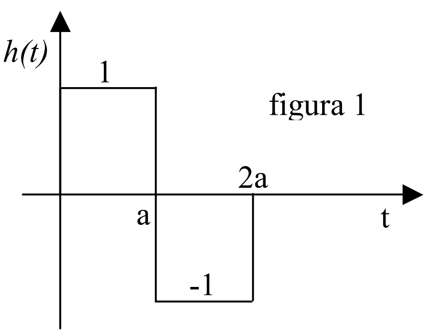


figura 1

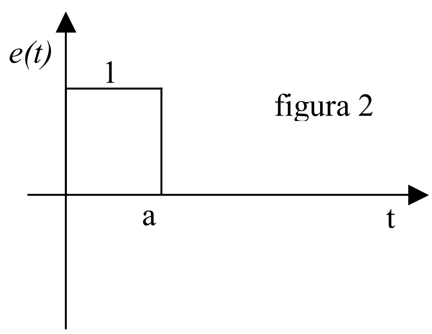


figura 2

Problema 3 (9 puntos)

a) En el circuito de la figura 1 las fuentes son las dadas en las figuras 2 y 3. Usando el teorema de Thévenin, hallar la relación entre R, Io y E para que el período del voltaje en el condensador (v_c) sea T.

b) Hallar y dibujar v_c en régimen sabiendo que RC = 2T.

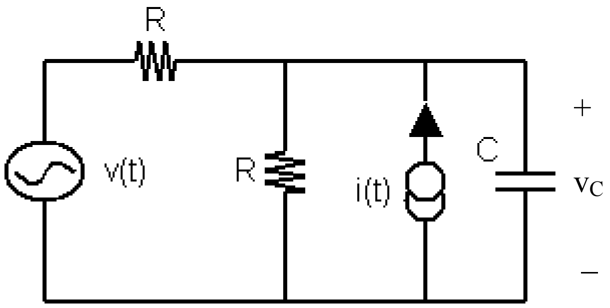


figura 1

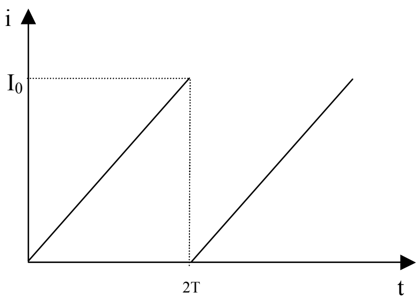


figura 2

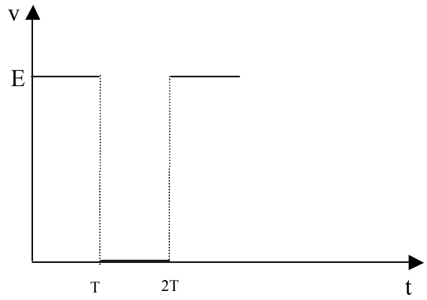


figura 3

Problema 4 (6 puntos)

figura 1

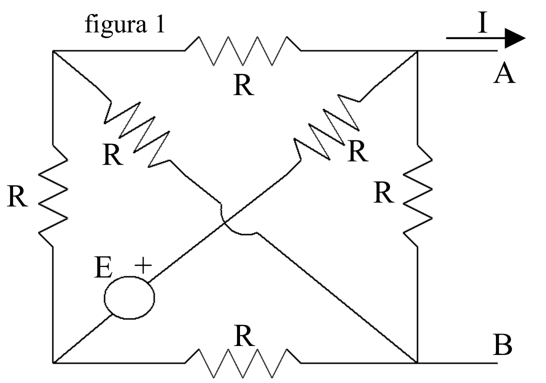
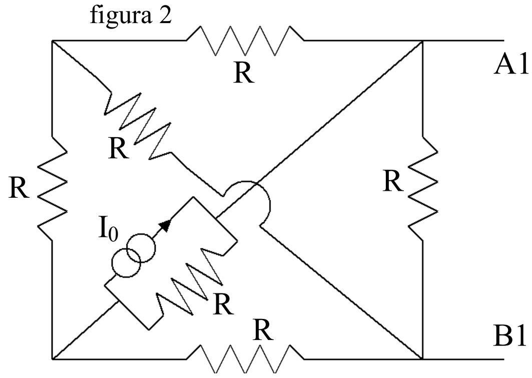


figura 2



a) Hallar el circuito equivalente Thévenin entre A y B, para el circuito de la figura 1. (Recordar que para transfigurar una estrella de tres impedancias idénticas, se multiplica por 3).

b) Deducir el equivalente Thévenin entre A1 y B1 en el circuito de la figura 2.

c) Se interconectan ambos circuitos uniendo A con A1 y B con B1. Llamaremos I a la corriente desde A a A1. Hallar:

i) condición para que I=0;

ii) condición para que $I=I_0$.

Problema 5 (9 puntos)

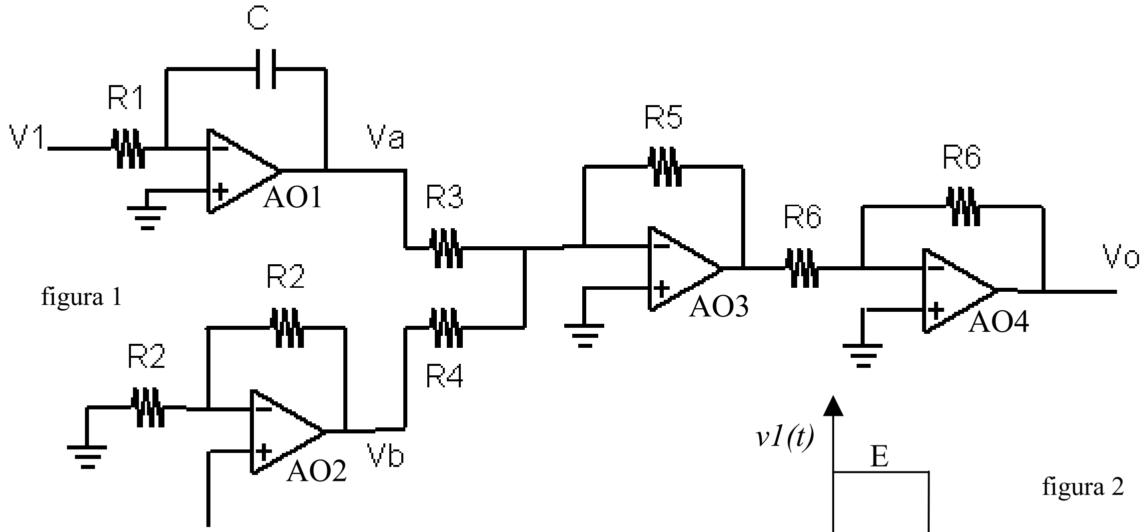


figura 1

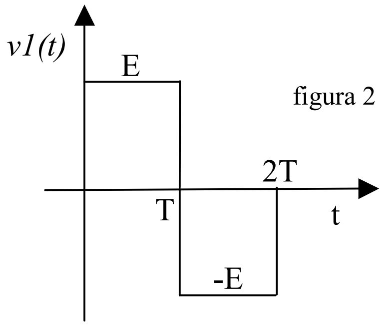


figura 2

En el circuito de la figura 1, los operacionales son ideales, con Ri=∞, Ro=0, A=∞. Se pide:

- **a)** hallar las señales Va(s), Vb(s) y Vo(s) en función de V1(s) y V2(s). Explique claramente el análisis que realiza.
- **b)** elegir los valores de R3, R4 y R5 para que a la salida (Vo) se obtenga el promedio de las señales Va y Vb. (Estos valores se mantienen en el resto del ejercicio).

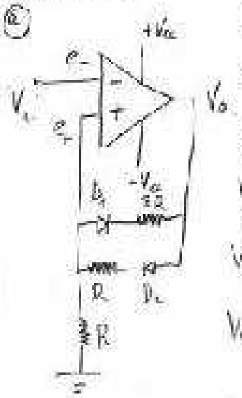
Supongamos que el operacional AO3 se alimenta entre fuentes ± Vcc. Se considera la señal *v1(t)* de la figura 2, y como *v2(t)* un escalón de amplitud E, con 0<E<Vcc.

- **c)** Mostrar que hay un valor máximo T_{MAX}, tal que si se elige $0<T< T_{MAX}$, el operacional AO3 no satura en ningún instante. Hallar T_{MAX} en función de E y de los parámetros del circuito.

SISTEMAS LINEALES 2 PRIMER PARCIAL 2005 (1)

Problema 1:

(a)



Sea V_i muy chica y negativa. Supongo el comparador saturado a $+V_{cc}$. Supongo D_1 OFF y D_2 ON. $\Rightarrow V_0 = V_{cc}$

En estas condiciones, por el divisor se tiene $e_+ = \frac{V_{cc}}{2}$

Verifico el comparador: $e_+ - e_- = \frac{V_{cc}}{2} - V_i > 0$ ✓

Verifico D_1: $v_{D1} = e_+ - V_0 = \frac{V_{cc}}{2} - V_{cc} = -\frac{V_{cc}}{2} < 0$ ✓

Verifico D_2: $i_{D2} = \frac{V_0 - e_+}{R} = \frac{V_{cc}}{2R} > 0$ ✓

Este estado se mantiene mientras V_i sea menor al umbral $\frac{V_{cc}}{2}$

Si $V_i > \frac{V_{cc}}{2}$, supongo el comparador saturado a $-V_{cc}$. Supongo D_1 ON y D_2 OFF $\Rightarrow V_0 = -V_{cc}$

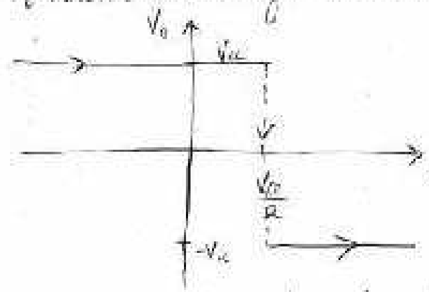
En estas condiciones, por el divisor se tiene $e_+ = \frac{R(-V_{cc})}{3R+R} = -\frac{V_{cc}}{4}$

Verifico el comparador: $e_+ - e_- = -\frac{V_{cc}}{4} - V_i < 0$ ✓ (pues $V_i > \frac{V_{cc}}{2}$)

Verifico D_1: $i_{D1} = \frac{e_+ - V_0}{3R} = \frac{-\frac{V_{cc}}{4} - (-V_{cc})}{3R} = \frac{V_{cc}}{4R} > 0$ ✓

Verifico D_2: $v_{D2} = V_0 - e_+ = -V_{cc} - \left(-\frac{V_{cc}}{4}\right) = -\frac{3V_{cc}}{4} < 0$ ✓

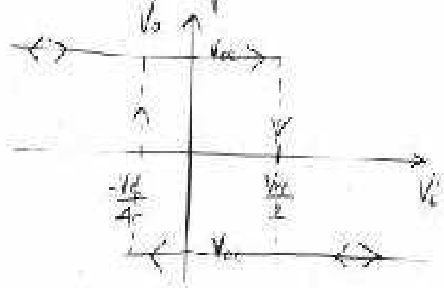
Para V_i crecientes me mantengo en este estado. La relación $V_0(V_i)$ encontrada es:



(b) Estudiemos para valores decrecientes de V_i. Arrancando desde valores grandes y positivos, me encuentro en el estado donde terminé en la parte anterior $\Rightarrow V_o = -V_{cc}$ (2)

Cambio de estado cuando V_i se hace menor que el umbral $-\frac{V_{cc}}{4}$

Si $V_i < -\frac{V_{cc}}{4}$ y decreciendo retorno al estado con $V_o = V_{cc}$, D_1 OFF y D_2 ON). La relación completa $V_o(V_i)$ es:



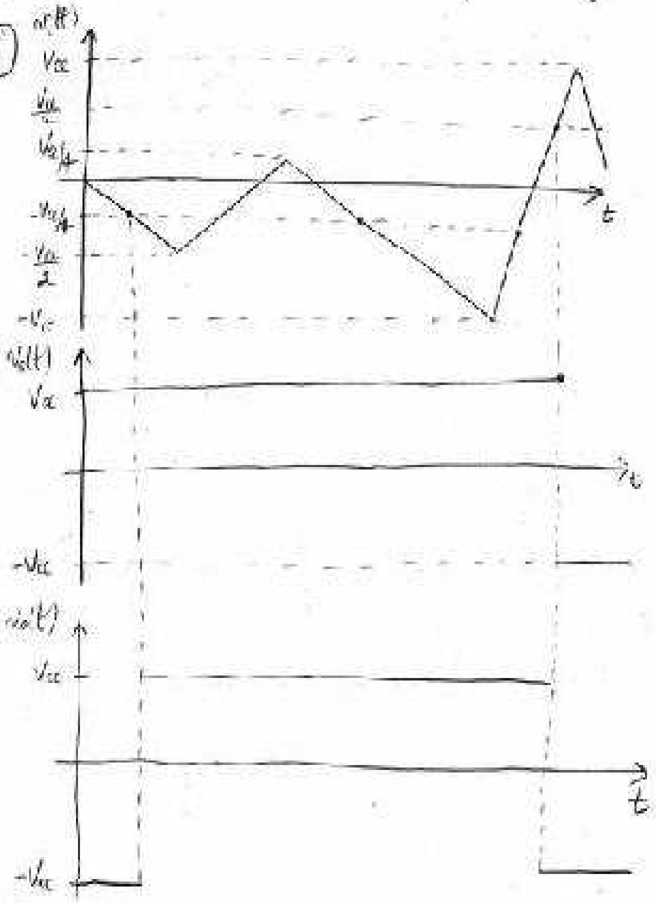
Es un comparador con histéresis

El umbral superior es $\frac{V_{cc}}{2}$

El inferior es $-\frac{V_{cc}}{4}$

(c) El ancho de la ventana de histéresis es $\frac{V_{cc}}{2} - \left(-\frac{V_{cc}}{4}\right) = \frac{3V_{cc}}{4}$

(d)

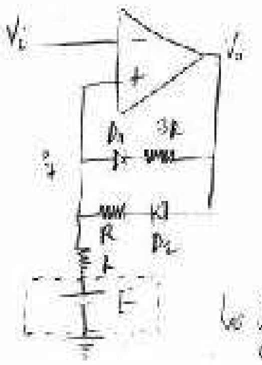


Si para $t=0$
$V_o = V_{cc}$

Si para $t=0$
$V_o = -V_{cc}$

3

(1) Debemos modificar el valor de los umbrales superior e inferior creando una fuente independiente de voltaje para modificar la referencia.



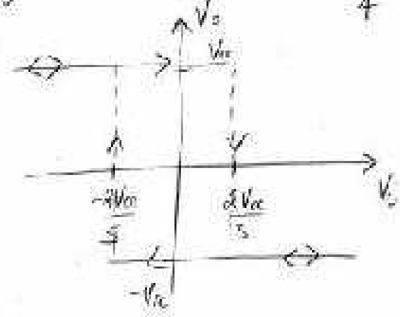
En este caso el umbral superior vale: (A.O. a V_{cc}, D_1 OFF, D_2 ON) $e_{T1} = \frac{V_{cc}+E}{2}$

El nuevo umbral inferior vale: (A.O. a $-V_{cc}$, D_1 ON, D_2 OFF) $e_{T2} = \frac{-V_{cc}+3E}{4}$ (condición: $3E < V_{cc}$)

Los igualo para imponer simetría: $e_{T1} = -e_{T2}$

$$\Rightarrow \frac{V_{cc}+E}{2} = \frac{V_{cc}-3E}{4} \Rightarrow 2V_{cc}+2E = V_{cc}-3E \Rightarrow \boxed{E = -\frac{V_{cc}}{5}}$$

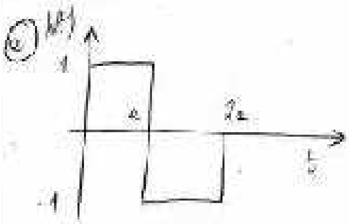
$$\Rightarrow e_{T1} = \frac{4V_{cc}}{10} = \frac{2V_{cc}}{5} \; ; \; e_{T2} = \frac{-V_{cc} - \frac{3V_{cc}}{5}}{4} = -\frac{8V_{cc}}{20} = -\frac{2V_{cc}}{5}$$



4

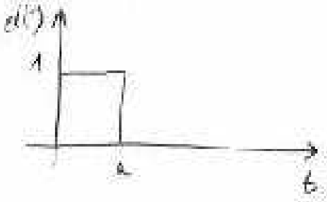
Problema 2:

a)



$h(t) = Y(t) - 2Y(t-a) + Y(t-2a)$

$\Rightarrow H(s) = \dfrac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{s} = \dfrac{(1-e^{-as})^2}{s}$

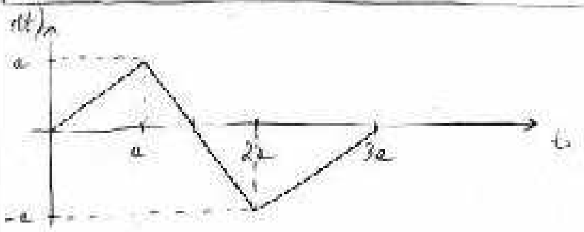


$e(t) = Y(t) - Y(t-a)$

$\Rightarrow E(s) = \dfrac{1 - e^{-as}}{s}$

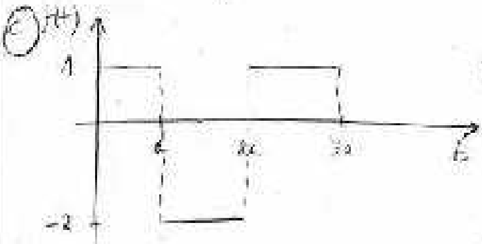
$r(t) = h(t) * e(t) \Rightarrow R(s) = H(s)E(s) = \dfrac{(1-e^{-as})^3}{s^2} = \dfrac{1-3e^{-as}+3e^{-2as}-e^{-3as}}{s^2}$

$\boxed{r(t) = tY(t) - 3(t-a)Y(t-a) + 3(t-2a)Y(t-2a) - (t-3a)Y(t-3a)}$



b) $r(t)$ se anula para $t=0$, $t=\frac{3}{2}a$, $t \geq 3a$

c)



$f(t) = Y(t) - 3Y(t-a) - 3Y(t-2a) - Y(t-3a)$

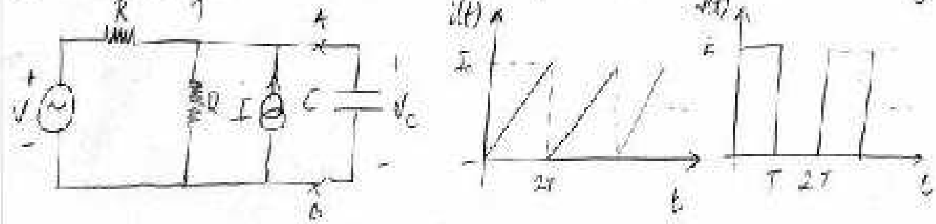
d) $F(s) = \dfrac{1 - 3e^{-as} - 3e^{-2as} - e^{-3as}}{s} = \dfrac{(1-e^{-as})^3}{s}$

$F(s) = H(s)G(s) \Rightarrow \dfrac{(1-e^{-as})^3}{s} = \dfrac{(1-e^{-as})^2}{s} G(s) \Rightarrow G(s) = 1 - e^{-as}$

$\boxed{g(t) = \delta(t) - \delta(t-a)}$

Problema 3: (5)

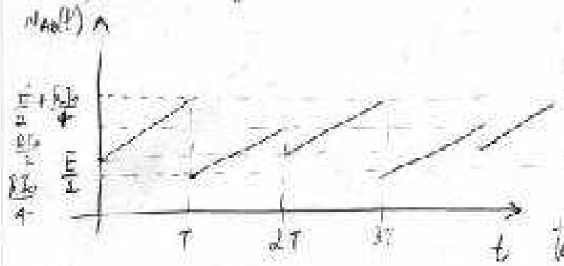
(a) Calcula el equivalente Thévenin entre A y B. Considera el condensador como carga



Anulando las fuentes: $Z_{AB} = R//R = R/2$

Para el voltaje de vacío: $V_{AO} = \frac{R}{R+R} V(s) + R//R\, I(s) = \frac{V(s)}{2} + \frac{R I(s)}{2}$

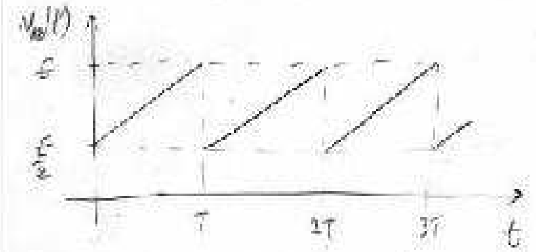
Buscamos que $v_{AB}(t)$ tenga periodo $T \Rightarrow v_c(t)$ tendrá periodo T.



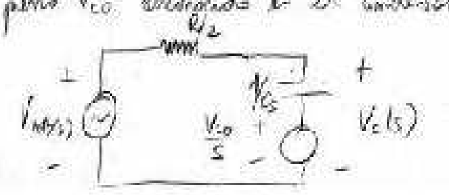
Si imponemos $\frac{RI_0}{4} = \frac{E}{2}$

$\Rightarrow \boxed{RI_0 = 2E}$

tenemos $v_{AB}(t)$ T periódica.



(b) Para hallar la respuesta en régimen, utilizo el circuito equivalente Thévenin. Analizo un periodo de $v_{AB}(t)$ luego de que el circuito alcanzó el régimen. Hay un dato pero V_{C0} desconocido en el condensador.



(6)

$V_{AB}(s) = \frac{E}{2s} + \frac{E}{2Ts^2}$

Igualando la corriente por Z_{AB} y el condensador: $\frac{V_{AB} - V_C}{R/2} = \left(V_C - \frac{V_{C0}}{s}\right)Cs$

$\Rightarrow \frac{E}{2s} + \frac{E}{2Ts^2} = -\frac{RC}{2} V_{C0} + V_C\left(1 + \frac{RC}{2}s\right)$. Viendo que $\frac{RC}{2} = T$

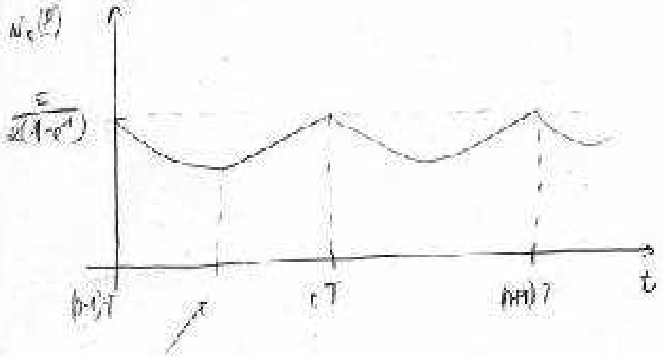
$\Rightarrow V_C(s) = \frac{E}{2s(1+Ts)} + \frac{E}{2Ts^2(1+Ts)} + \frac{TV_{C0}}{(1+Ts)}$

Antitransformando: $v_C(t) = \left[\frac{E}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + \frac{E}{2}\left(\frac{t}{T} - 1 + e^{-\frac{t}{T}}\right) + V_{C0}e^{-\frac{t}{T}}\right] Y(t)$

$\Rightarrow \boxed{v_C(t) = \left[\frac{E}{2}\frac{t}{T} + V_{C0}e^{-\frac{t}{T}}\right] Y(t)}$

Si se trata de la solución en régimen: $v_C(T) = V_{C0} = \frac{E}{2} + V_{C0}e^{-1}$

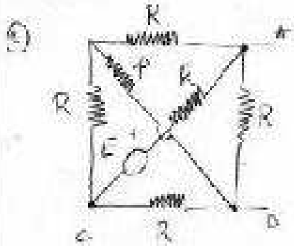
$\Rightarrow \boxed{V_{C0} = \frac{E}{2(1-e^{-1})}}$



Presenta un mínimo para $nT(1 - \ln(e-1))$, $n \in \mathbb{Z}$

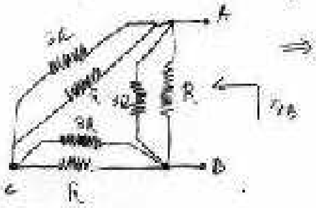
Problema 4:

a)



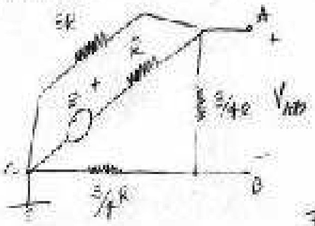
Hallar el equivalente Thévenin entre A y B. Debo calcular Z_{AB} y V_{AB}.

Para el cálculo de Z_{AB}, anulo la fuente independiente. Transfiguro la estrella de resistencias de valor R y bornes A, B y C. Resulta el siguiente circuito:



$$\Rightarrow Z_{AB} = \underbrace{\left[2\underbrace{(3R//R)}_{3/4R}\right]}_{3/2R} // \underbrace{\left[3R//R\right]}_{3/4R} \Rightarrow \boxed{Z_{AB} = R/2}$$

Para V_{AB}, también transfiguro la misma estrella y simplifico un par de equivalentes paralelo:

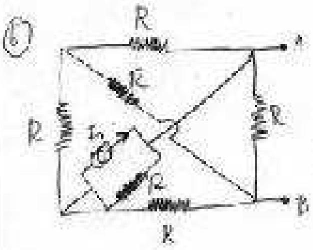


Tomo C como referencia y calculo la tensión en A respecto a tierra. Planteando la ecuación de nodos:

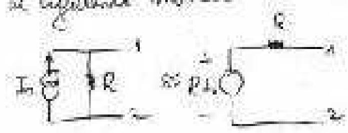
$$\frac{E - V_A}{R} = \frac{V_A}{3/2R} + \frac{V_A}{3R} \Rightarrow V_A = \frac{E}{2}$$

Finalmente: $V_{AB} = \frac{V_A}{2} \Rightarrow \boxed{V_{AB} = \frac{E}{4}}$

b)

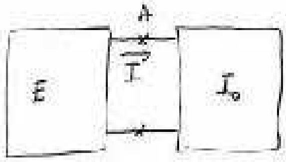


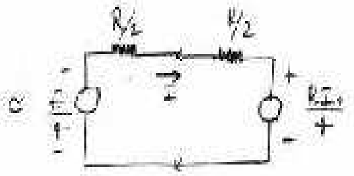
El modelo Norton de la diagonal es equivalente al siguiente modelo Thévenin:



Puedo usar la parte anterior $\Rightarrow \boxed{Z_{AB} = R/2}$, $\boxed{V_{AB} = \frac{RI_0}{4}}$

(c) Interconectando ambos circuitos: 4



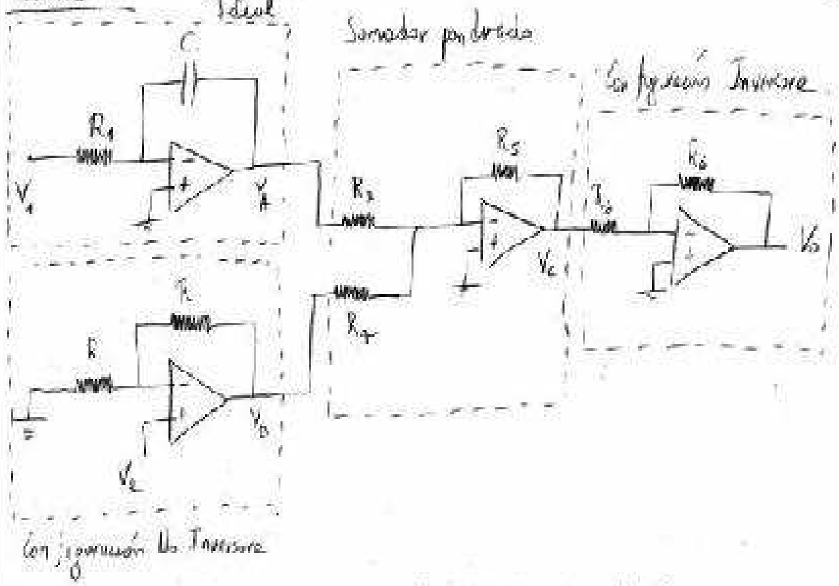


Para que $\overline{I}=0 \Rightarrow \boxed{E = RI_0}$

Para que $\overline{I} = I_0 \Rightarrow \dfrac{\frac{E}{4} - \frac{RI_0}{4}}{R} = I_0 \Rightarrow E - RI_0 = 4RI_0 \Rightarrow \boxed{E = 5RI_0}$

9

Problema 5:



(a) Reconociendo el integrador ideal: $V_A(s) = -\frac{1}{R_1 C s} V_1(s)$

De la configuración no inversora: $V_B(s) = 2V_2(s)$

Del sumador: $V_C(s) = -\frac{R_5}{R_3}V_A(s) - \frac{R_5}{R_4}V_B(s)$

Del inversor: $V_0(s) = -V_C(s)$

Juntando todo: $\boxed{V_0(s) = -\frac{R_5}{R_3 R_1 C s}V_1(s) + \frac{2R_5}{R_4}V_2(s)}$

(b) $V_0 = \frac{R_5}{R_3}V_A(s) + \frac{R_5}{R_4}V_B(s) \Rightarrow$ Si $\boxed{R_3 = R_4 = 2R_5}$

$\Rightarrow V_0 = \frac{V_A(s)+V_B(s)}{2}$ como se quería.

(c) La salida del A.O. 3 es $v_C(t)$; $V_C(s) = \frac{V_1(s)}{2R_1 C s} - V_2(s)$

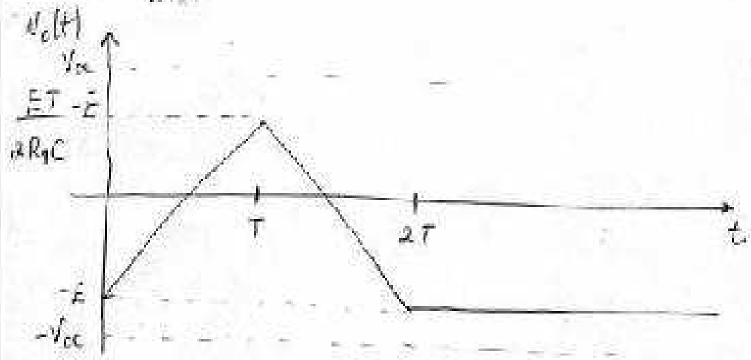
donde se han utilizado las relaciones de la parte (b)

$V_1(s) = \frac{E}{s} - \frac{2E}{s}e^{-Ts} + \frac{E}{s}e^{-2Ts}$, $V_2(s) = \frac{E}{s}$

10

$$\Rightarrow V_c(s) = \frac{E}{2R_1Cs^2}\left[1-2e^{-Ts}+e^{-2Ts}\right] - \frac{E}{s}$$

$$\Rightarrow v_c(t) = \frac{E}{2R_1C}\left[tY(t) - 2(t-T)Y(t-T) + (t-2T)Y(t-2T)\right] - EY(t)$$



Nunca habrá saturación contra $-V_{cc}$ pues $E < V_{cc}$.

El $T_{máx}$ pedido es tal que $\max_t \{v_c(T_{máx})\} = V_{cc}$

$$\Rightarrow E\left(\frac{T_{máx}}{2R_1C} - 1\right) = V_{cc} \Rightarrow \boxed{T_{máx} = 2R_1C\left(\frac{V_{cc}}{E}+1\right)}$$