

Sistemas Lineales 2
Primer parcial, 1º de octubre 2004

Te solicitamos:

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- utilizar las hojas de un solo lado.
- resolver problemas diferentes en hojas separadas.
- al finalizar la prueba, **colocar las hojas dentro del sobre**, depositar el mismo sobre el banco y retirarse del salón.
- **NO ESCRIBIR NI RAYAR EL SOBRE**, ya que será re-utilizado.

Se recuerda que la prueba es individual y **dura 4 horas**.
Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

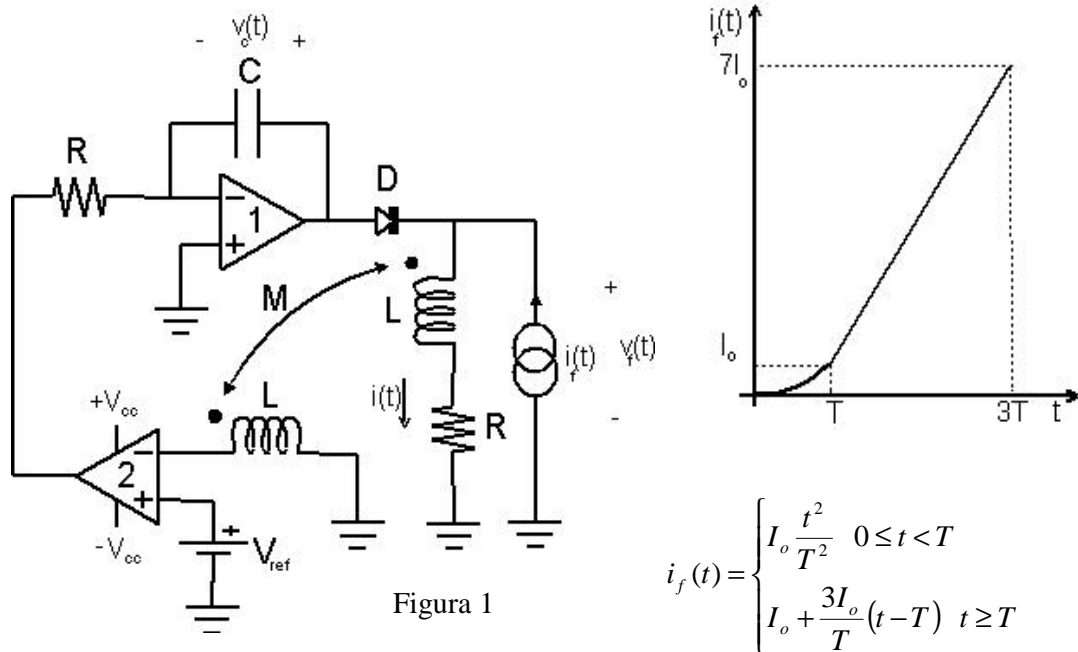
Problema 1 (13 puntos)

Se considera el circuito de la Figura 1 donde:

- El A.O. 1 es ideal, trabajando en zona lineal sin saturación.
- El A.O. 2 es ideal, trabajando como comparador entre niveles $\pm V_{cc}$.
- V_{ref} es una fuente de tensión continua. $i_f(t)$ es una fuente de corriente variable según se indica en la gráfica adjunta.

Sabiendo que el circuito parte del reposo, se pide:

- Hallar y **graficar** la tensión en el condensador $v_c(t)$, la corriente $i(t)$ y la tensión en bornes de la fuente de corriente $v_f(t)$ hasta el instante t' en que conmuta el comparador. Hallar una relación entre los parámetros para que $t' = T$.
- Cumplíndose dicha relación**, repetir la parte anterior a partir de t' y hasta el instante t'' en que el diodo invierte su estado. Hallar una relación entre los parámetros para que $t'' = 3T$.

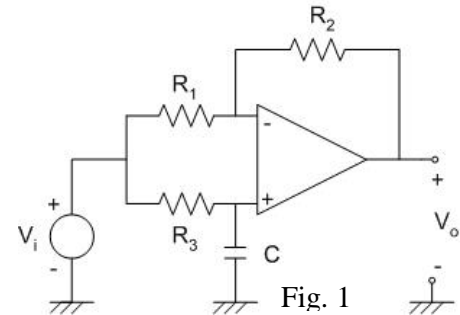


Indicar claramente las hipótesis y justificar las verificaciones que haga sobre los elementos no lineales.

Problema 2 (8 puntos)

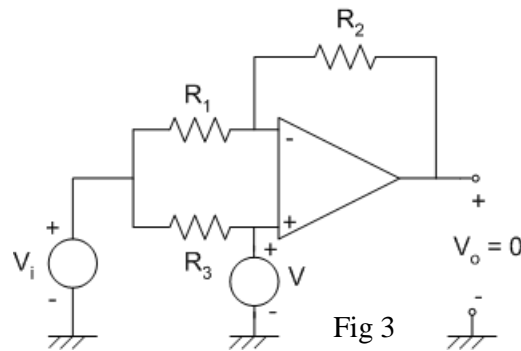
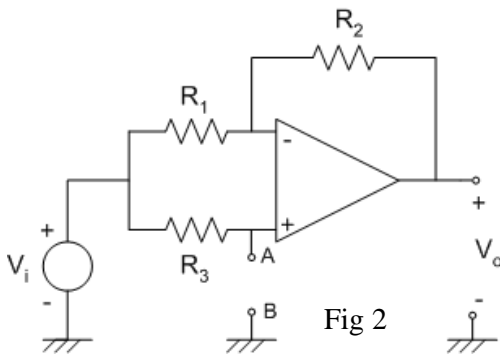
a) En el circuito de la Fig. 1, el operacional es ideal.

- a1) Calcular la transferencia $H(s) = \frac{V_o}{V_i}$
- a2) Calcular la transferencia H' “en alta frecuencia”, es decir, $H' = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s)$. Verificar, calculando directamente H' , estudiando como responde el condensador en alta frecuencia.



b) Se retira el capacitor C del circuito (Fig. 2).

- b1) Calcular la impedancia Z_V vista desde A, B.
- b2) Se conecta entre A y B una fuente de voltaje V , cuyo valor se ajusta de modo de anular la salida V_o , en presencia de las dos fuentes V_i y V (ver Fig. 3). Se define la “impedancia de anulación” Z_N como relación entre ese valor de V y la corriente que ella suministra. Calcular Z_N , como función de R_1 , R_2 , R_3 (y no de V_i).



c) Si Z_1 es la impedancia del elemento retirado (condensador C), verificar que se cumple

$$\text{la relación : } H = H' \cdot \frac{1 + \frac{Z_1}{Z_N}}{1 + \frac{Z_1}{Z_V}},$$

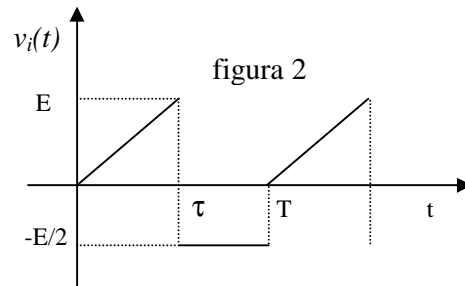
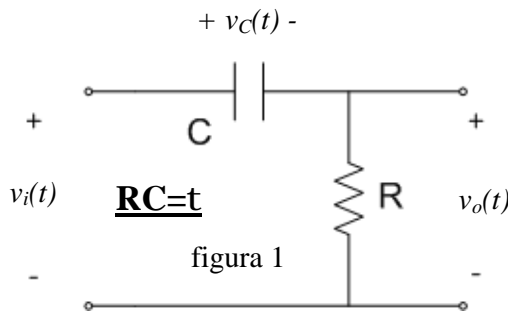
Problema 3 (5 puntos)

Se considera la función localmente integrable de soporte en la semirrecta positiva:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 2^n - 1 & , \quad n.T < t < (n+1).T \end{cases}$$

Calcular su Transformada de Laplace $F(s)$. (Sugerencia: hallar la derivada como distribución de $f(t)$).

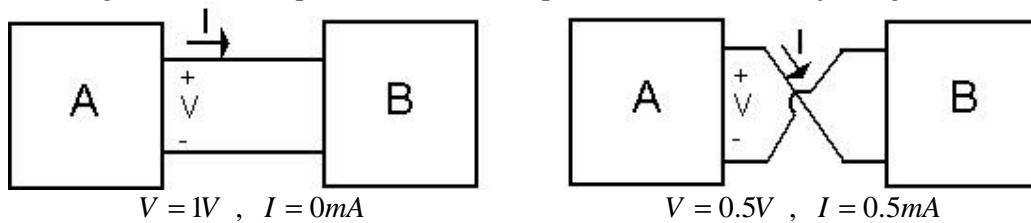
Problema 4 (7 puntos)



Se considera el circuito de la figura 1, **con el condensador inicialmente descargado**. La entrada $v_i(t)$ es la señal **periódica** que se muestra en la figura 2. Dado $\tau > 0$, mostrar que existe $T > \tau$ (y hallarlo) tal que el circuito se encuentra en régimen **ya desde $t=0$** .

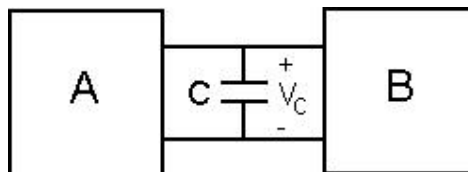
Problema 5 (7 puntos)

- a) Se consideran dos cajas negras lineales A y B, que en su interior contienen únicamente resistencias y fuentes de tensión y corriente continua. Si para las siguientes conexiones se obtienen las tensiones y corrientes que se muestran en la figura, hallar el equivalente Thévenin para cada una de las cajas negras.



- b) Suponiendo el condensador inicialmente descargado, **hallar y graficar** $v_c(t)$

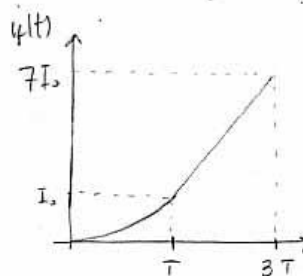
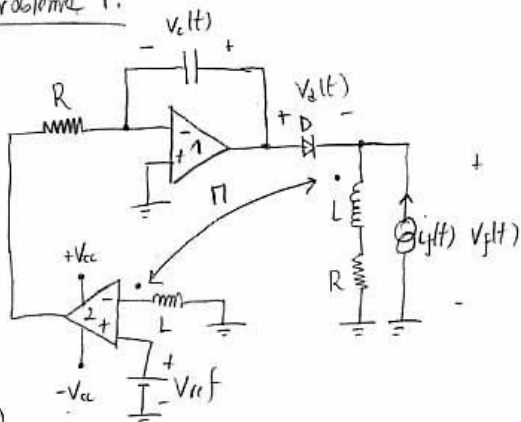
para $C = \frac{4}{3} \text{ mF}$.



SISTEMAS LINEALES 2: PRIMER PARCIAL 2004

①

Problema 1:



$$i_f(t) = \begin{cases} \frac{I_0 t^2}{T^2} & 0 \leq t < T \\ I_0 + \frac{3I_0(t-T)}{T} & t \geq T \end{cases}$$

②

Con el circuito partiendo del reposo, supongo D OFF y A.O.2 saturado contra $+V_{cc}$

Reconociendo el bloque integrador:

$$V_c(t) = -\frac{V_{cc}}{RC} t \gamma(t)$$

$$i(t) = i_f(t)$$

Como A.O.2 no tiene corriente: $V_f(s) = L s I_f(s) + R I_f(s)$, $I_f(s) = \frac{2I_0}{T^2 s^3}$

$$\Rightarrow V_f(s) = \frac{2LI_0}{T^2 s^2} + \frac{2RI_0}{T^2 s^3} \Rightarrow N_f(t) = \left[\frac{2LI_0}{T^2} t + \frac{RI_0}{T^2} t^2 \right] \gamma(t)$$

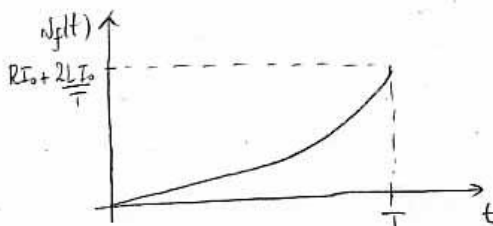
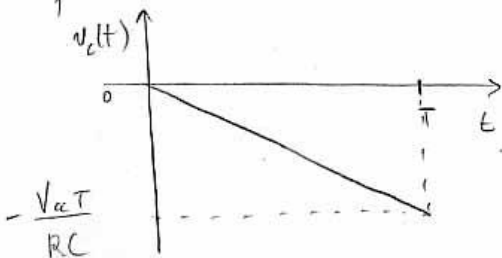
$$\text{En A.O.2, } e_-(s) = I_f(s) = \frac{2I_0}{T^2 s^3} \Rightarrow e_-(t) = \frac{2I_0}{T^2} t \gamma(t)$$

$$\text{Verifiquemos el estado del diodo: } V_d(t) = V_c(t) - N_f(t) = -\frac{V_{cc}}{RC} t - \frac{2LI_0}{T^2} t - \frac{RI_0}{T^2} t^2 < 0$$

El diodo no va a cambio de estado mientras $i_f(t)$ siga creciendo y A.O.2 esté saturado a $+V_{cc}$.

$$\text{El comparador cambia cuando } e_+(t) - e_-(t) = V_{ref} - \frac{2I_0}{T^2} t = 0$$

$$\text{Para que cambie en } t' = T, \left. V_{ref} - \frac{2I_0}{T^2} t' \right|_{t'=T} = 0 \Rightarrow T V_{ref} = 2I_0$$



⑥ Estudiamos para $t' = t - T \geq 0$. Supongamos D OFF y A.O.2 saturado a $-V_{cc}$ ②

Del integrador:
$$N_c(t') = \left[-\frac{V_{cc}T}{RC} + \frac{V_{cc}}{RC} t' \right] \gamma(t')$$

$$if(t) = I_0, \quad If(s) = \frac{I_0}{s} + \frac{3I_0}{Ts^2}$$

$$Vf(s) = Ls If(s) - LI_0 + R If(s) = LI_0 + \frac{3LI_0}{Ts} - LI_0 + \frac{RI_0}{s} + \frac{3RI_0}{Ts^2}$$

$$\Rightarrow N_f(t') = \left[\frac{3LI_0}{T} + RI_0 + \frac{3RI_0}{T} t' \right] \gamma(t')$$

$$\bar{E}_n \text{ A.O.2, } e_-(s) = \pi_s If(s) - \pi I_0 = \pi I_0 + \frac{3\pi I_0}{Ts} - \pi I_0$$

$$\Rightarrow e_-(t') = \frac{3\pi I_0}{T} = \frac{3}{2} V_{ref} > V_{ref} \text{ por lo cual el comparador está saturado a } -V_{cc}$$

↑
relación de
parte ②

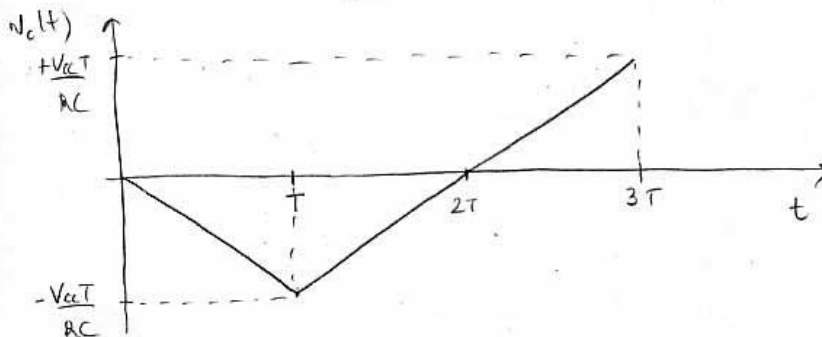
Verifiquemos el estado del diodo:

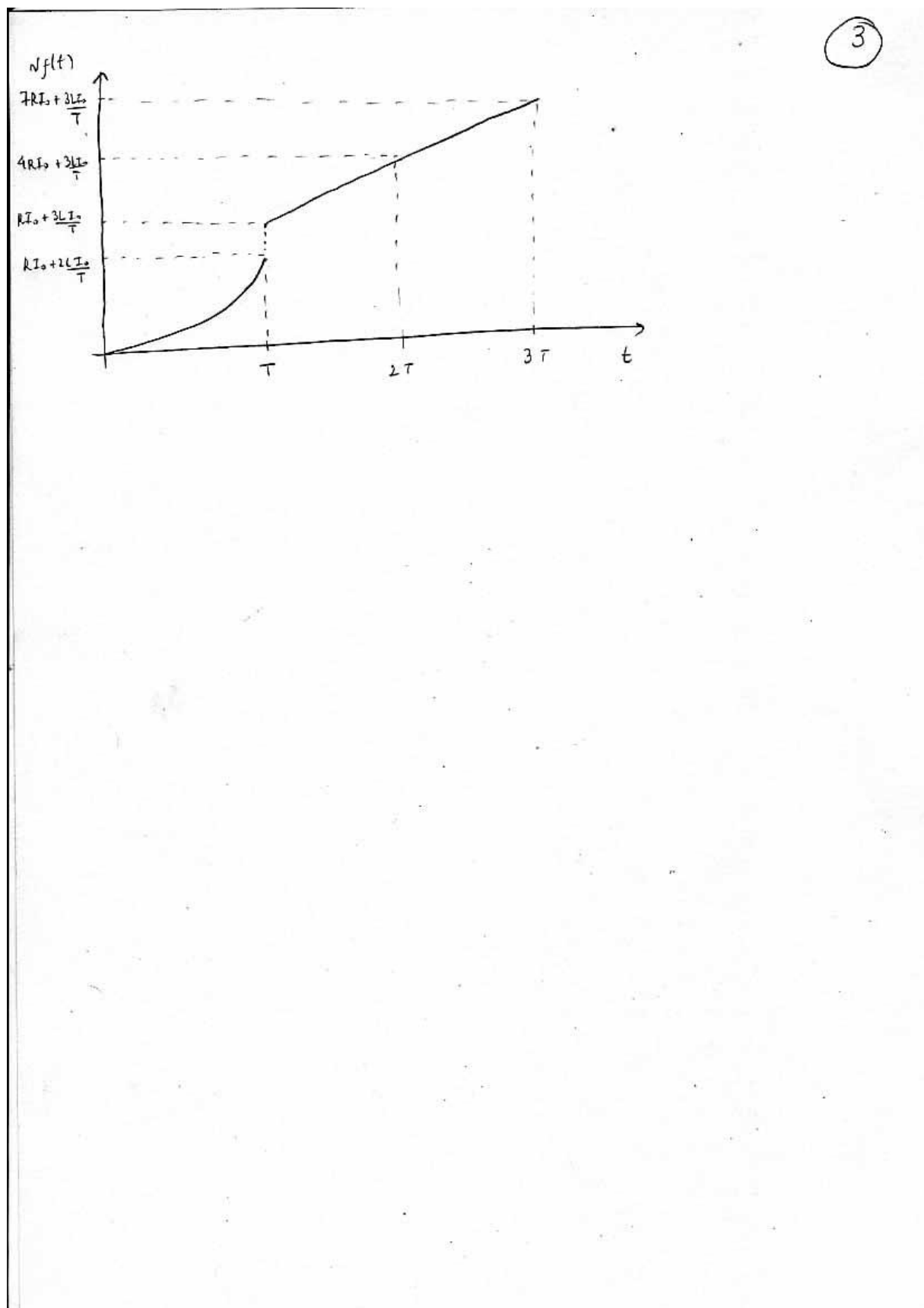
$$N_d(t') = N_c(t') - N_f(t') = -\frac{V_{cc}T}{RC} + \frac{V_{cc}}{RC} t' - \frac{3LI_0}{T} - RI_0 - \frac{3RI_0}{T} t' < 0 \text{ inmediatamente}$$

Para que el diodo cambie de estado en $t'' = 3T$, busco que $N_d(t' = 2T) = 0$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{V_{cc}T}{RC} + \frac{V_{cc}2T}{RC} - \frac{3LI_0}{T} - RI_0 - 6RI_0 = \frac{V_{cc}T}{RC} - \frac{3LI_0}{T} - 7RI_0$$

lo cual me da:
$$\frac{V_{cc}T}{RC} = I_0 \left(\frac{3L}{T} + 7R \right)$$

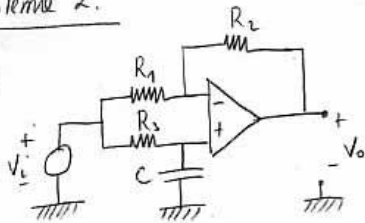




Problema 2:

(4)

a) 1)



Del cortocircuito virtual y el divisor de tensiones:

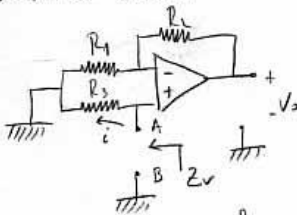
$$e_- = e_+ = \frac{\frac{1}{Cs} V_i}{R_3 + \frac{1}{Cs}} = \frac{V_i}{R_3 Cs + 1}$$

Planteando la ecuación de nodos en la rama superior (el A.O. no tiene corriente):

$$\frac{V_i - e_-}{R_1} = \frac{e_- - V_o}{R_2}$$

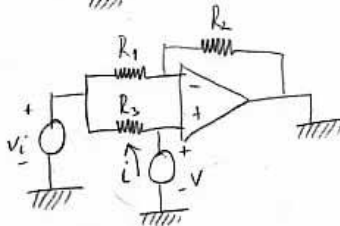
Sustituyendo e_- y operando se tiene

$$H(s) = \frac{R_1 - R_2 R_3 Cs}{R_1 (R_3 Cs + 1)}$$

2) En alta frecuencia ($s \rightarrow \infty$) el condensador se comporta como un cortocircuito $\Rightarrow e_- = e_+$.Tengo una configuración inversora $\Rightarrow H'(s) = -\frac{R_2}{R_1}$ Evaluando directamente el límite en la expresión para $H(s)$ se llega al mismo resultado.b) Para el cálculo de Z_v , anulo las fuentes independientes $\Rightarrow V_i = 0$ 

$$Z_v = \frac{V_{oc}}{i} \Rightarrow Z_v = R_3$$

2)



$$i = \frac{V - V_i}{R_3}, \quad e_- = e_+ = V$$

Planteando la ecuación de nodos en la rama superior:

$$\frac{V_i - V}{R_1} = \frac{V - V_o}{R_2} \Rightarrow i = -\frac{V R_1}{R_2 R_3} \Rightarrow Z_n = -\frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$c) H = H' \frac{1 + \frac{Z_1}{Z_v}}{1 + \frac{Z_1}{Z_v}} \quad \text{con} \quad H' = -\frac{R_2}{R_1}, \quad Z_1 = \frac{1}{Cs}, \quad Z_n = -\frac{R_2 R_3}{R_1} \quad \text{y} \quad Z_v = R_3$$

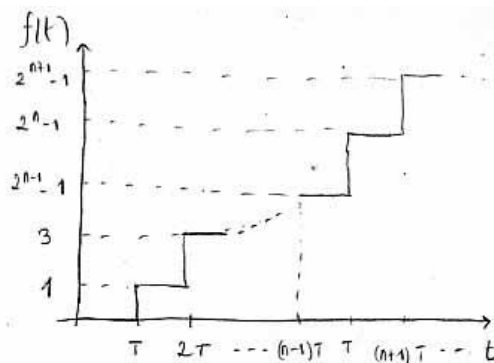
Operando se obtiene

$$H(s) = \frac{R_1 - R_2 R_3 Cs}{R_1 (R_3 Cs + 1)}$$

igual que antes.

Problema 3:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2^n - 1, & nT < t < (n+1)T \end{cases}$$



(5)

La amplitud del salto para $t = nT$ vale: $(2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}(2 - 1) = 2^{n-1}$.
 Sendo $f(t)$ localmente constante salvo en los puntos de discontinuidad, podemos derivarla como distribución obteniendo un tren de δ 's con amplitudes dadas por la magnitud de los saltos.

$$\Rightarrow f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \delta(t - nT)$$

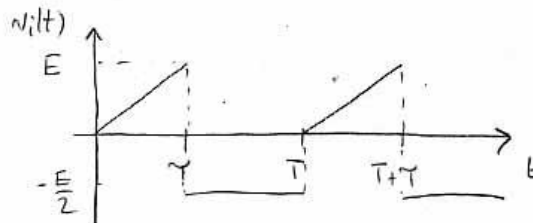
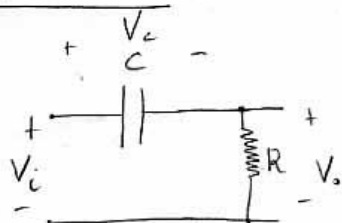
$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}[f'(t)] &= \mathcal{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \delta(t - nT)\right] \stackrel{\text{linealidad}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \mathcal{L}[\delta(t - nT)] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \langle \delta(t - nT), e^{-st} \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-nTs} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2e^{-Ts})^n = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2e^{-Ts})^n - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\text{Sumando la serie geométrica: } \mathcal{L}[f'(t)] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - 2e^{-Ts}} - 1 \right] = \frac{e^{-Ts}}{1 - 2e^{-Ts}}$$

Finalmente, a partir del teorema de la derivación: $F(s) = \frac{\mathcal{L}[f'(t)]}{s}$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{e^{-Ts}}{s(1 - 2e^{-Ts})}$$

Problema 4:



Suponiendo el condensador inicialmente descargado. $V_i(s) = \frac{E}{\tau s^2}$

Por el divisor de tensiones: $V_o(s) = \frac{1}{RC} \frac{V_i(s)}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{E}{\tau^2} \frac{1}{s^2(s + \frac{1}{\tau})}$

$$\Rightarrow v_o(t) = E \left[\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \gamma(t)$$

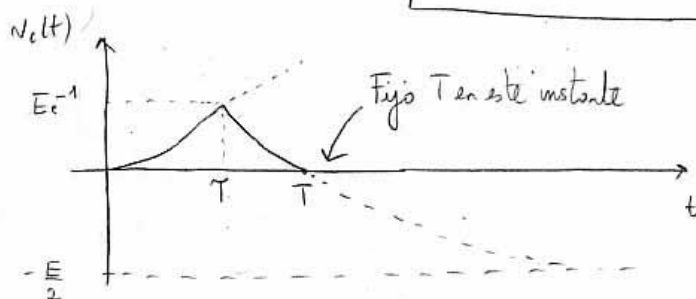
$$v_o(\tau) = V_{co} = E e^{-1}$$

Estudiamos para $t' = t - \tau \geq 0$. Tenemos la descarga del condensador a partir de una entrada de amplitud $-\frac{E}{2}$. El valor inicial de $v_o(t')$ es $E e^{-1}$, el valor final es $-\frac{E}{2} \Rightarrow v_o(t') = -\frac{E}{2} + (E e^{-1} + \frac{E}{2}) e^{-\frac{t'}{\tau}} \gamma(t')$

Para que el circuito haya alcanzado su régimen ya desde $t=0$, debe elegirse T tal que $v_o(t' = T - \tau) = 0$. De esta forma el valor de $v_o(T)$ coincide con el dato previo antes de iniciar el primer período.

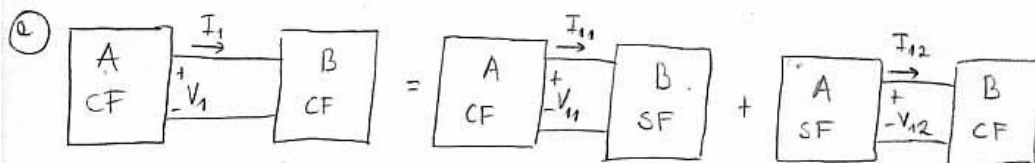
$$\Rightarrow 0 = -\frac{E}{2} + E \left(e^{-1} + \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{T-\tau}{\tau}} \Rightarrow 1 = (2e^{-1} + 1) e^{-\frac{T-\tau}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \frac{T-\tau}{\tau} = \ln(1 + 2e^{-1}) \Rightarrow T = \tau(1 + \ln(1 + 2e^{-1}))$$



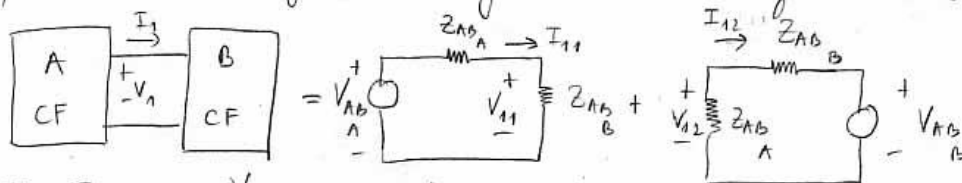
Problema 5:

7



Por superposición $V_1 = 1V = V_{11} + V_{12}$, $I_1 = 0mA = I_{11} + I_{12}$

Represento la caja con fuentes (SF) como su impedancia vista, ya que solo nos interesa la corriente que consume, en tanto que la caja (CF) fuentes puede representarse por su equivalente Thévenin, ya que no hay mutua entre los cajas (elementos resistivos)



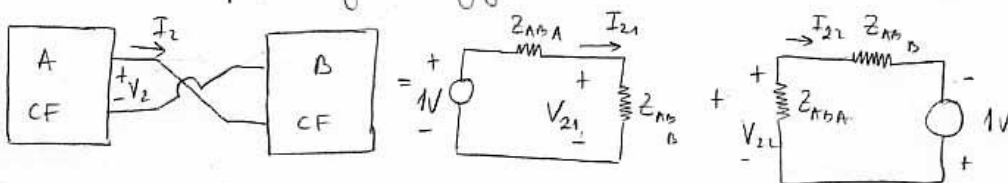
$$I_1 = I_{11} + I_{12} = \frac{V_{AB_A}}{Z_{AB_A} + Z_{AB_D}} - \frac{V_{AB_B}}{Z_{AB_A} + Z_{AB_D}} = 0 \Rightarrow V_{AB_A} = V_{AB_B}$$

$$V_1 = \frac{Z_{AB_B}}{Z_{AB_A} + Z_{AB_D}} V_{AB_B} + \frac{Z_{AB_A}}{Z_{AB_A} + Z_{AB_D}} V_{AB_B} = V_{AB} = V_{AB_B} = 1V$$

$$\boxed{V_{AB_A} = 1V}$$

$$\boxed{V_{AB_B} = 1V}$$

Demuestra similar para la segunda configuración:



Por superposición $V_2 = V_{21} + V_{22} = 0,5V$, $I_2 = I_{21} + I_{22} = 0,5mA$

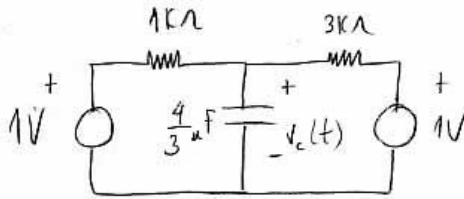
$$I_2 = \frac{1V}{Z_{AB_A} + Z_{AB_D}} + \frac{1V}{Z_{AB_A} + Z_{AB_D}} = 0,5mA \Rightarrow Z_{AB_A} + Z_{AB_D} = 4k\Omega$$

$$V_2 = \frac{Z_{AB_B} 1V}{Z_{AB_A} + Z_{AB_D}} - \frac{Z_{AB_A} 1V}{Z_{AB_A} + Z_{AB_D}} = 0,5V \Rightarrow \frac{Z_{AB_B} - Z_{AB_A}}{Z_{AB_A} + Z_{AB_D}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{AB_A} = 1k\Omega}$$

$$\boxed{Z_{AB_D} = 3k\Omega}$$

⑥



donde se han utilizado los equivalentes
Thévenin para los ojos A y B hallados
en la parte anterior.

Corre de un circuito RC con excitación de corriente. Valor inicial de 0V pues aparece
descargado, y valor final de 1V ya que por el circuito en régimen no circula
corriente.

Constante de tiempo $\tau = (1k\Omega // 3k\Omega) \cdot \frac{4}{3} \mu F = 1ms$

$$\Rightarrow v_c(t) = 1V(1 - e^{-\frac{t}{1ms}}) \gamma(t)$$

