Sistemas Lineales 2
Parexamen, 13 de marzo del 2003

Te solicitamos:

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- **resolver problemas y preguntas diferentes en hojas separadas**.
- al finalizar la prueba, **colocar las hojas dentro del sobre**, depositar el mismo sobre el banco y retirarse del salón.
- **NO ESCRIBIR NI RAYAR EL SOBRE**, ya que será re-utilizado.

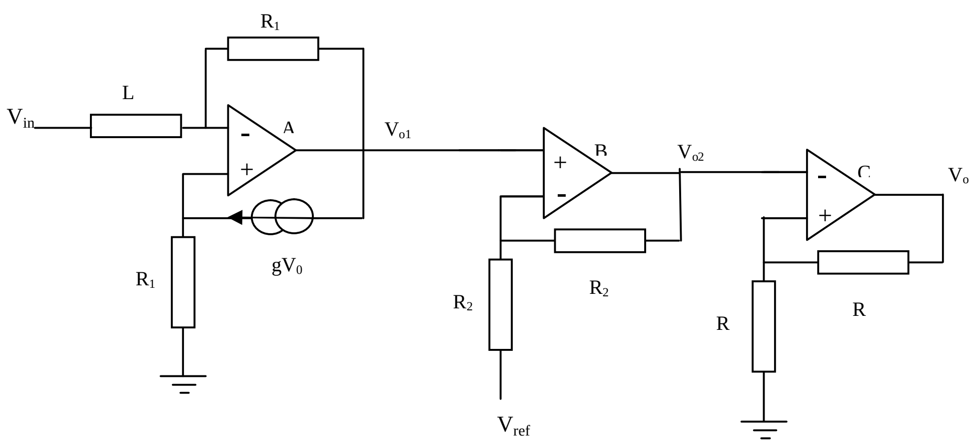
Se recuerda que la prueba es individual y **dura 4 horas**. Te recomendamos administrar el tiempo de manera de poder hacer toda la prueba. Para aprobar completamente la asignatura es necesario tener al menos un ejercicio conceptualmente completo y al menos dos preguntas conceptualmente completas. Para aprobar el curso se pide al menos el 25% del total de los puntos. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. En las preguntas teóricas, se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Muchas gracias por prestar atención a las solicitudes que te hacemos.
Buena suerte!!!

Ejercicio 1 (30 puntos)

En el circuito de la figura, los operacionales A y B se suponen ideales, con $R_{in} = \infty$, $R_o = 0$ y ganancia infinita. El operacional C opera en su zona no lineal, de tal modo que:

$$v_{c+} > v_{c-} \Rightarrow V_o = V_{cc}$$
$$v_{c+} < v_{c-} \Rightarrow V_o = 0$$



En el instante $t = 0$ se aplica en la entrada V_{in} un escalón de amplitud V_E.
Se suponen además las siguientes relaciones válidas:

$L / R_1 = 2 \cdot t$

$m \cdot R_1 = 2 \cdot V_E / V_{cc}$ $\qquad 8.V_E < V_{cc}$.

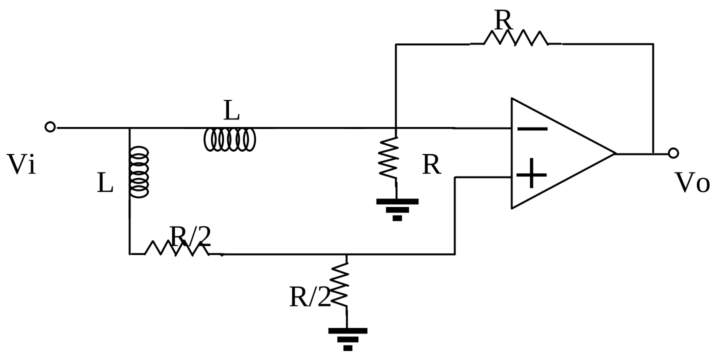
$V_{ref} = -V_{cc}$

Se pide:

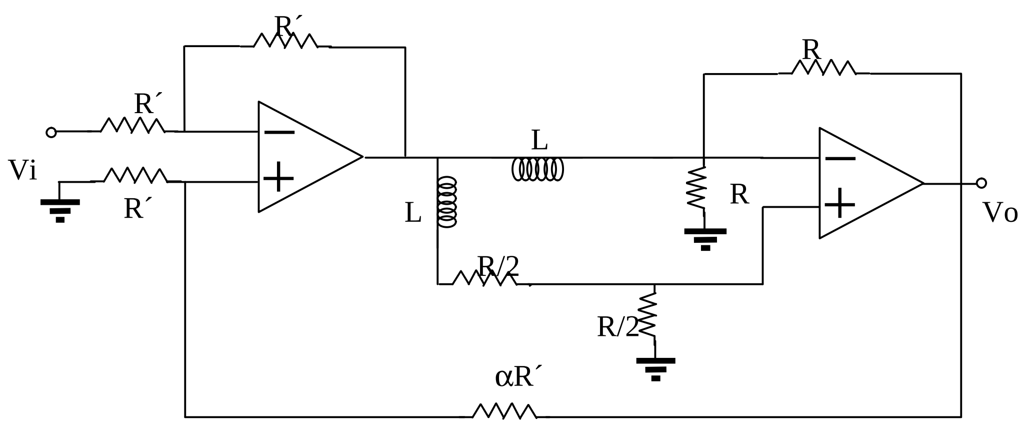
Graficar $V_o(t)$ y $V_{o1}(t)$ en función de V_E, V_{cc}, t, calculando además los instantes en los que $V_o(t)$ cambia de estado, hasta que el circuito alcance el régimen. Justificar las hipótesis hechas sobre el comparador.

<u>Ejercicio 2</u> (30 puntos)

a) Considerando el operacional ideal de la figura la transferencia H(s)=Vo(s)/Vi(s) del circuito:



b) Hallar la transferencia de lazo abierto del siguiente circuito, con las mismas hipótesis sobre los operacionales que las realizadas en la parte **a)**.



c) **i-** Estudiar la estabilidad del circuito de la parte **b)** utilizando el criterio de Nyquist para α positivo.
ii ¿Qué cambiaría si se implementara el circuito con α negativo? **Justificar.**

<u>Pregunta 1</u> (10 puntos)

Se define el cuadripolo "girador", cuyo símbolo se representa en la figura, por las relaciones:

$$\begin{cases} V_1 = -r\,I_2 \\ V_2 = r\,I_1 \end{cases}$$

Queda pues definido por un solo parámetro resistivo r >0.

a) Recordando que la energía recibida por el cuadripolo es: $E = \int_{t_1}^{t_2} (v_1 i_1 + v_2 i_2)dt$, decir si el girador es activo o pasivo.

b) Si se carga el secundario con una impedancia Z_L, calcular la impedancia Z_V vista desde el primario. En particular, decir qué tipo de impedancia se ve si:

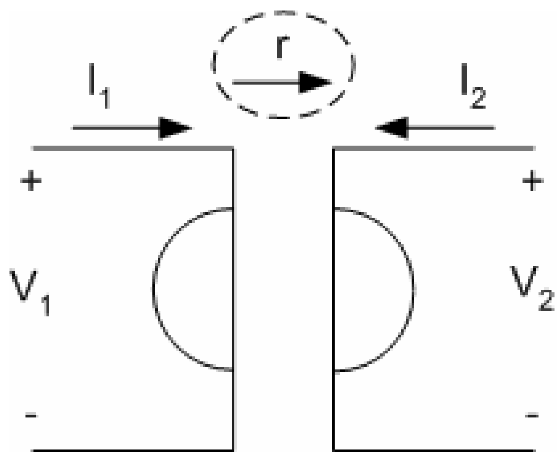
i) Z_L es una resistencia R.

ii) Z_L es un capacitor C.

c) Calcular los parámetros generales A, B, C, D del girador.

d) Deducir si el girador es recíproco.

e) Se conectan en cascada dos giradores idénticos. ¿Qué se puede afirmar del cuadripolo global?



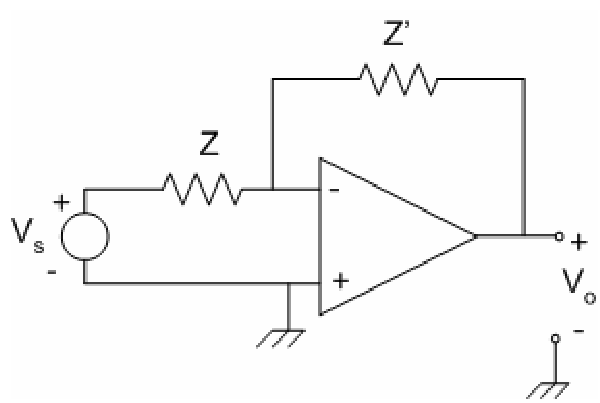
<u>Pregunta 2</u> (10 puntos)

En el circuito de la figura, el operacional está alimentado por fuentes $+V_{cc}$ y $-V_{cc}$.

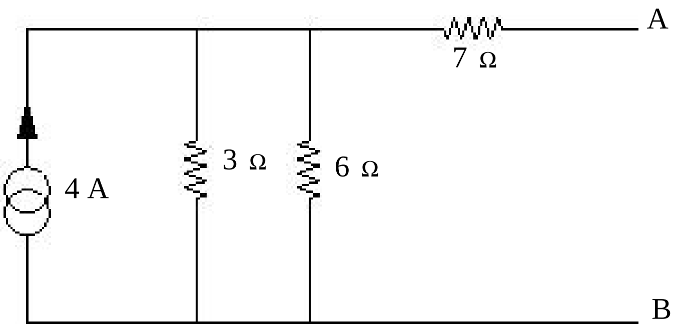
Decir si en las siguientes condiciones, hay o no una tierra virtual en la pata **-**.

<u>Justificar en cada caso.</u>

1)	A finito	$R_i = \infty$	$R_o = 0$
2)	$A = \infty$	R_i finito	$R_o = 0$
3)	$A = \infty$	R_i finito	$R_o \neq 0$
4)	A finito	$R_i = \infty$	$R_o \neq 0$



<u>Pregunta 3</u> (10 puntos)



a) Enunciar y demostrar del Teorema de Thévenin, especificando **<u>claramente</u>** las hipótesis y **cómo** se usan las mismas en la demostración. (Definir en forma precisa la tensión de vacío y la impedancia vista).

b) Hallar el **equivalente Thévenin** del circuito anterior.

<u>Pregunta 4</u> (10 puntos)

a) Enunciar y demostrar el Teorema del valor inicial de la Transformada de Laplace, explicitando **<u>claramente</u>** las hipótesis.

b) Hallar la relación entre las Transformadas de Laplace de $f(t)$ y $f(t-t_0)$, siendo t_0 un real positivo y f una función de soporte $[0,+\infty)$.

c) Sea T una distribución transformable y a un real positivo. Hallar la relación entre la Transformada de Laplace de $T(t)$ y la de la distribución $e^{-at}.T(t)$.

(Justificar los distintos pasos seguidos.)

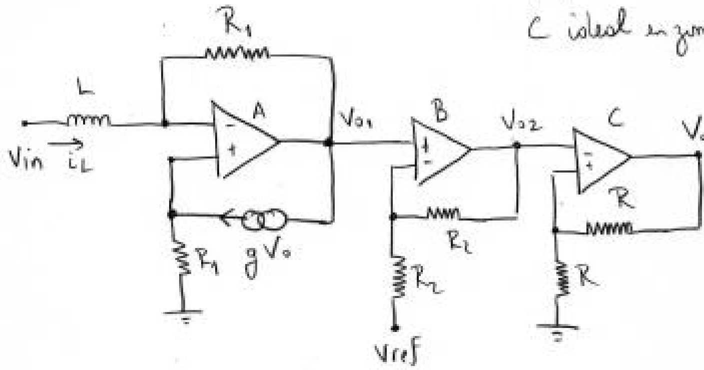
SISTEMAS LINEALES 2: PAREXAMEN MARZO 2003

1

Ejercicio 1:

A, B ideales en zona lineal

C ideal en zona no lineal entre niveles 0, V_{cc}



Datos: $\frac{L}{R_1} = 2\tau$

$g R_1 = \frac{2V_E}{V_{cc}}$

$8V_E < V_{cc}$

$V_{ref} = -V_{cc}$

En $t=0$ se aplica un escalón de tensión de amplitud V_E a la entrada $\Rightarrow V_{in} = \frac{V_E}{s}$

Supongo inicialmente $V_o = 0$ $(V_{c-} = V_{o2} > V_{c+})$. Además $V_{c+} = 0$ por el divisor a la salida

Con la fuente de corriente controlada por tensión anulada, la primera etapa es un integrador:

$$\frac{V_{o1}}{V_{in}} = -\frac{R_1}{Ls} = -\frac{1}{2\tau s} \Rightarrow V_{o1} = -\frac{V_E}{2\tau s^2}, \quad \boxed{v_{o1}(t) = \left[-\frac{V_E}{2\tau} t\right] Y(t)}$$

De la tierra virtual en B $\Rightarrow$

$$\frac{V_{o2} - V_{o1}}{\cancel{R_2}} = \frac{V_{o1} - \frac{V_{ref}}{s}}{\cancel{R_2}} = V_{o1} + \frac{V_{cc}}{s}$$

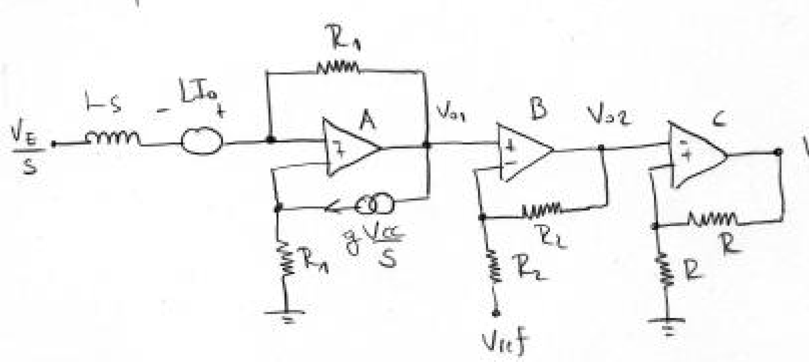
$$\Rightarrow V_{o2} = 2V_{o1} + \frac{V_{cc}}{s}, \quad \boxed{v_{o2}(t) = \left[V_{cc} - \frac{V_E}{\tau} t\right] Y(t)}$$

El comparador C conmuta para $t = t_1 / v_{o2}(t_1) = V_{c-} = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{V_{cc}}{V_E}\tau}$

$$v_{o1}(t_1) = -\frac{V_{cc}}{2} \quad ; \quad I_o = i_L(t_1) = \frac{-v_{o1}(t_1)}{R_1} \Rightarrow I_o = \frac{V_{cc}}{2R_1}$$

Estudiamos para $t' = t - t_1 \geq 0$

Se tiene que $V_o = V_{cc}$. Además $V_{c+} = \frac{V_{cc}}{2}$ por el divisor a la salida. Lo que tenemos es



(2)

$$V_{A+} = V_{A-} = R_1 I_0 \frac{V_{cc}}{S} = \frac{2V_E}{S} \Rightarrow \frac{V_{in} - \left(-LI_0 + \frac{2V_E}{S}\right)}{Ls} = \frac{\frac{2V_E}{S} - V_{o1}}{R_1}$$

$$\Rightarrow V_{o1} = \frac{2V_E}{S} + \frac{2R_1 V_E}{Ls^2} - \frac{V_{cc}}{2s} - \frac{R_1 V_E}{Ls^2}$$

$$\boxed{v_{o1}(t') = \left[2V_E - \frac{V_{cc}}{2} + \frac{V_E}{2\tau} t'\right] Y(t')} \qquad v_{o1}(0^+) = 2V_E - \frac{V_{cc}}{2}$$

Notar el salto positivo de tensión en v_{o1}, ya que la actuación de la fuente de corriente, produce una caída en R_1 que levanta la referencia del circuito.

Nuevamente se tiene que $V_{o2} = 2V_{o1} + \frac{V_{cc}}{S} \Rightarrow \boxed{v_{o2}(t') = \left[V_E\left(4 + \frac{t'}{\tau}\right)\right] Y(t')}$

El comparador C conmuta para $t' = t_2 \,/\, v_{o2}(t_2) = V_{c-} = \frac{V_{cc}}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 = \tau \frac{(V_{cc} - 8V_E)}{2V_E}} > 0 \text{ por el dato de letra}$$

$$v_{o1}(t_2) = -\frac{V_{cc}}{4}, \quad I_o' = i_L(t_2) = \frac{2V_E}{R_1} - \frac{v_{o1}(t_2)}{R_1} \Rightarrow I_o' = \frac{V_{cc} + 8V_E}{4R_1}$$

Estudiamos para $t'' = t' - t_2 \geq 0$. Nuevamente $V_o = 0$ y $V_{c+} = 0$ por el divisor.

$$\frac{V_{in} + LI_o'}{Ls} = -\frac{V_{o1}}{R_1} \Rightarrow V_{o1} = -\frac{(V_{cc} + 8V_E)}{4s} - \frac{R_1}{L}\frac{V_E}{s^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{o1}(t'') = \left[-\frac{(V_{cc} + 8V_E)}{4} - \frac{V_E}{2\tau} t''\right] Y(t'')} \qquad v_{o1}(0^+) = -2V_E - \frac{V_{cc}}{4}$$

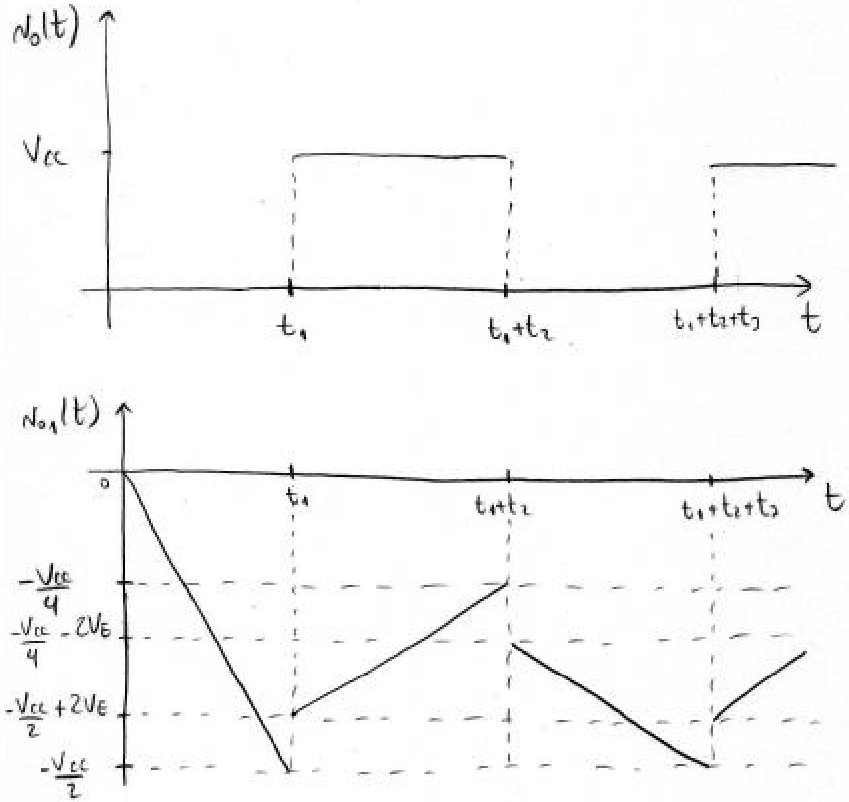
Nuevamente se tiene que: $V_{o2} = 2V_{o1} + \frac{V_{cc}}{S}$, $\boxed{v_{o2}(t'') = \left[\frac{V_{cc} - 8V_E}{2} - \frac{V_E}{\tau} t''\right] Y(t'')}$

El comparador C conmuta para $t'' = t_3 \,/\, v_{o2}(t_3) = V_{c-} = 0 \Rightarrow \boxed{t_3 = \frac{\tau (V_{cc} - 8V_E)}{2V_E}}$

$$v_{o1}(t_3) = -\frac{V_{cc}}{2}; \quad I_o'' = i_L(t_3) = -\frac{v_{o1}(t_3)}{R_1} \Rightarrow I_o'' = \frac{V_{cc}}{2R_1} = I_0$$

por lo que alcanzó el régimen.

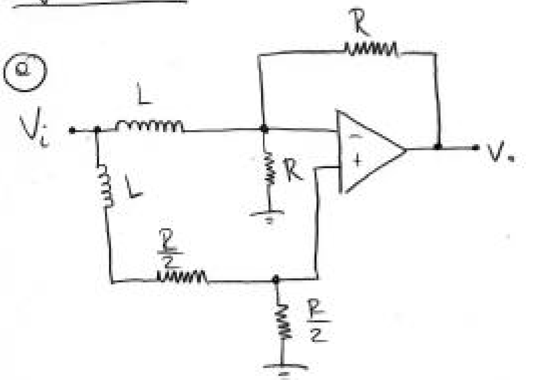
3


$v_0(t)$
V_{cc}
t_1
t_1+t_2
$t_1+t_2+t_3$
t
$v_{o1}(t)$
0
t_1
t_1+t_2
$t_1+t_2+t_3$
t
$-\frac{V_{cc}}{4}$
$-\frac{V_{cc}}{4}-2V_E$
$-\frac{V_{cc}}{2}+2V_E$
$-\frac{V_{cc}}{2}$

4

Ejercicio 2:

ⓐ



Operacional ideal

Por el divisor resistivo se tiene que

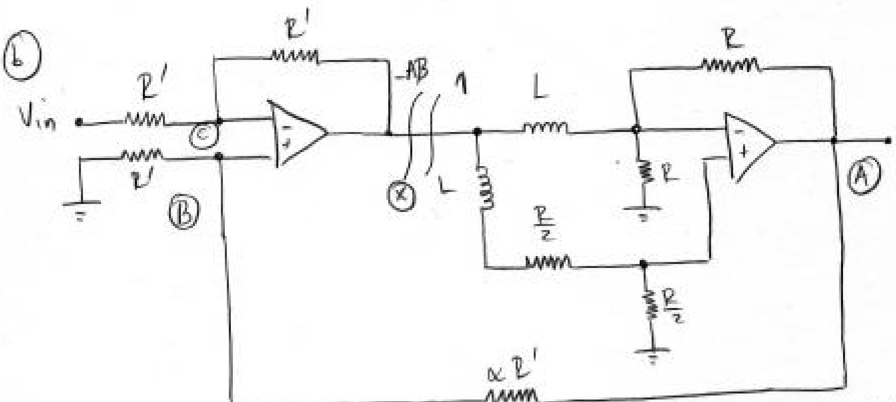
$$V_+ = \frac{\frac{R}{2}V_{in}}{R+Ls} = \frac{R}{2(R+Ls)}V_{in}$$

De la tierra virtual se tiene $V_+ = V_-$

Planteando la ecuación de nudo: $\frac{V_{in}-V_+}{Ls} = \frac{V_+}{R} + \frac{V_+ - V_o}{R} \Rightarrow V_o = \left(\frac{R+2Ls}{Ls}\right)V_+ - \frac{R}{Ls}V_{in}$

$$V_o = \left(\frac{R(R+2Ls)}{2Ls(R+Ls)} - \frac{R}{Ls}\right)V_{in} = -\frac{R^2\,V_{in}}{2Ls(R+Ls)} \Rightarrow \boxed{H(s) = -\frac{R^2}{2L^2}\,\frac{1}{s(s+\frac{R}{L})}}$$

ⓑ



Abro el lazo e inyecto una señal unitaria en Ⓧ. Se que a la vuelta tengo $-A\beta$. Reconociendo el bloque ya estudiado, en Ⓐ tengo $H(s)$. En Ⓑ tengo $\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)H(s)$ por el divisor resistivo. Notando que en la apertura de lazo se anula V_{in} y por la tierra virtual, en Ⓒ tengo $\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)H(s)$. Finalmente $-\frac{H(s)}{1+\alpha} = \frac{H(s)}{1+\alpha} + A\beta$

$$\Rightarrow \boxed{-A\beta(s) = \frac{2H(s)}{1+\alpha}}$$

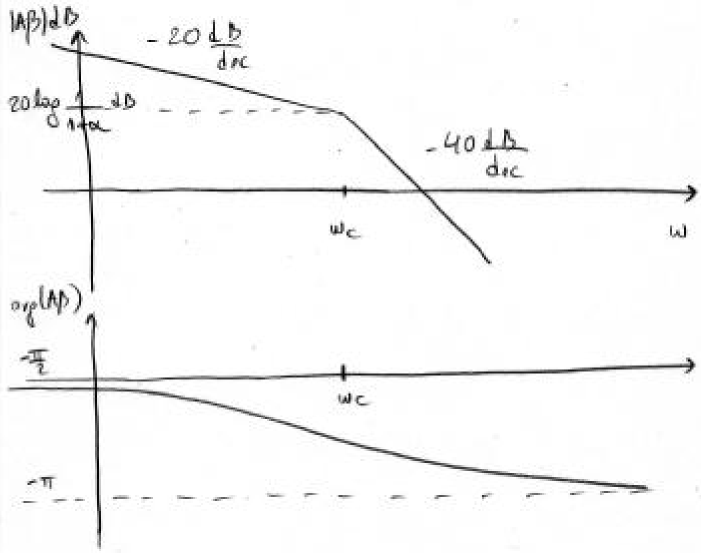
ⓒ (i) Realicemos en primer lugar los diagramas de Bode asintóticos de $A\beta(j\omega)$

Sea $\omega_c = \frac{R}{L} \Rightarrow A\beta(j\omega) = \frac{\omega_c^2}{1+\alpha}\,\frac{1}{j\omega(j\omega+\omega_c)}$

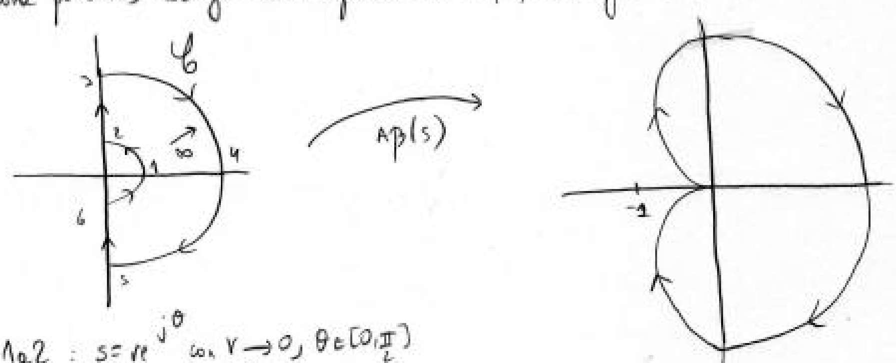
5

Si $\omega \ll \omega_c \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \dfrac{\omega_c}{(1+\alpha)j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| \simeq 20\log\dfrac{\omega_c}{1+\alpha} - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \simeq -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Si $\omega \gg \omega_c \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \dfrac{-\omega_c^2}{(1+\alpha)\,\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| = 20\log\dfrac{\omega_c^2}{1+\alpha} - 40\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) = -\pi \end{cases}$



Ahora podemos realizar el diagrama de Nyquist y ver cuantas vueltas da alrededor de -1



De 1 a 2 : $s = re^{j\theta}$ con $r \to 0$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow A\beta(s) \simeq \dfrac{\omega_c}{1+\alpha}\dfrac{e^{-j\theta}}{r}$ con $r \to 0$ y va de 0 a $-\frac{\pi}{2}$

De 2 a 3 uso la información del Bode.

De 3 a 4 se mapea al origen.

El resto simétrico respecto al eje real.

Para la curva $\mathcal{C}$ elegida $P = 0$

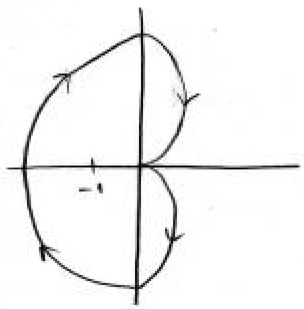
Del Nyquist se observa que $N = Z - P = 0$

$\Rightarrow Z = 0$ y es ESTABLE $\forall \alpha$

6

(ii) Si $0 < \alpha < -1$ el signo de $A\beta$ no cambia y sigue siendo ESTABLE

Si $\alpha < -1$, se invierte el signo y el diagrama se gira π. El Nyquist queda:



$P = 0$ y $N = Z - P = 1 \Rightarrow Z = 1$ y el sistema es INESTABLE