Sistemas Lineales 2
Parexamen, 13 de febrero del 2003

Te solicitamos:

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- **resolver problemas diferentes en hojas separadas**.
- al finalizar la prueba, **colocar las hojas dentro del sobre**, depositar el mismo sobre el banco y retirarse del salón.
- **NO ESCRIBIR NI RAYAR EL SOBRE**, ya que será re-utilizado.

Se recuerda que la prueba es individual y **dura 4 horas**. No olvides de administrar el tiempo de la mejor manera. Para aprobar completamente la asignatura es necesario tener al menos un ejercicio completo y al menos dos preguntas completas. Para aprobar el curso se pide el 25% del total de los puntos. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. En las preguntas teóricas, se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

Ejercicio 1 (30 puntos)

a) **i)** En el circuito de la figura 1 siguiente hallar la transferencia $H(s)=\dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$, sabiendo que $RC=\dfrac{L}{R}=t$. **(6)**

ii) Verificar que puede escribirse como: $H(s)=\dfrac{ts+5}{-3t^2s^2+2ts+1}$. **(2)**

iii) Verificar que se cumple que $H(jw_0)=\dfrac{1}{2}$, con $w_0=\dfrac{\sqrt{3}}{t}$. **(1)**

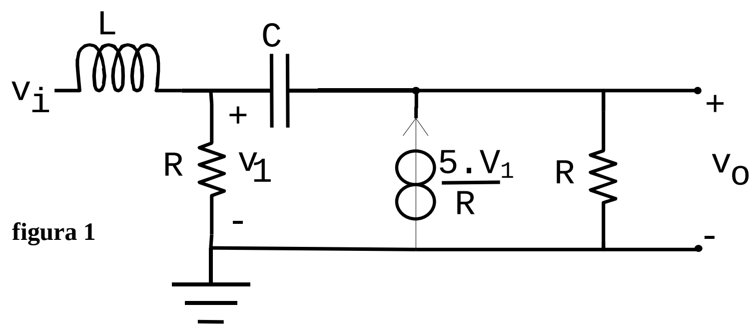


figura 1

b) Deducir la transferencia en lazo abierto del circuito de la figura 2; los operacionales son ideales. (Se sugiere identificar bloques de transferencia conocida antes de abrir el lazo). Verificar que da $-Ab(s)=k.H(s)$. **(9)**

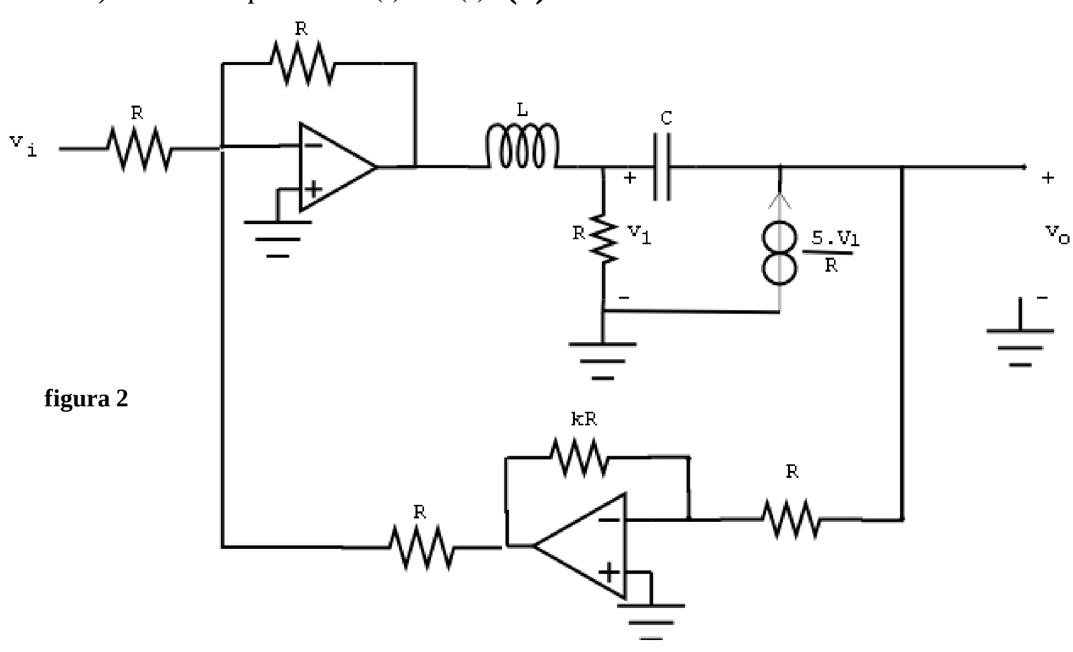


figura 2

c) Utilizando el Criterio de Nyquist, estudiar la estabilidad del sistema realimentado, discutiendo según k. **(12)**

<u>Ejercicio 2</u> (30 puntos)

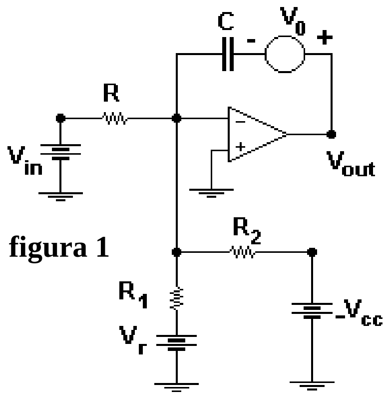


figura 1

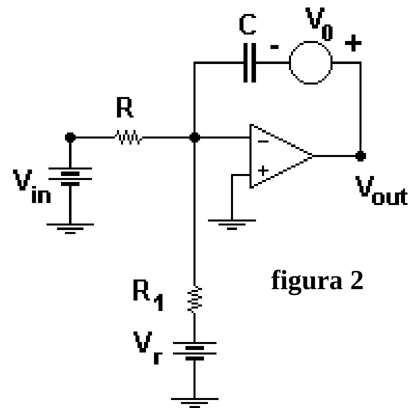


figura 2

a) En los circuitos de las figuras 1 y 2, hallar $\mathbf{V_{out}}$ en función de $\mathbf{V_{in}}$, $\mathbf{V_r}$, $\mathbf{V_o}$ y $\mathbf{V_{cc}}$. **(6)**

b) i) Hallar y graficar $\mathbf{V_1(t)}$ y $\mathbf{V_2(t)}$ del circuito de la figura 3, conociendo que solamente el operacional A está trabajando en zona no lineal (fuentes $\pm \mathbf{V_{cc}}$) y los otros dos trabajan en zona lineal, que $\mathbf{V_0=2\ V_{cc}/3}$ (carga inical del condensador) y que $\mathbf{V_2(t=0)=-V_{cc}}$. **(18)**

ii) Calcular el período de la señal $\mathbf{V_2(t)}$. **(3)**

iii) Hallar la condición que se debe cumplir para que las pendientes de la señal $\mathbf{V_1(t)}$ sean iguales en módulo en cada semiciclo.

(3)

Se cumple que:

$$\frac{V_{cc}}{R_2}-\frac{V_{in}}{R}-\frac{V_r}{R_1}>0 \quad V_{cc}, V_{in}\; y\; V_r>0$$

y son constantes.

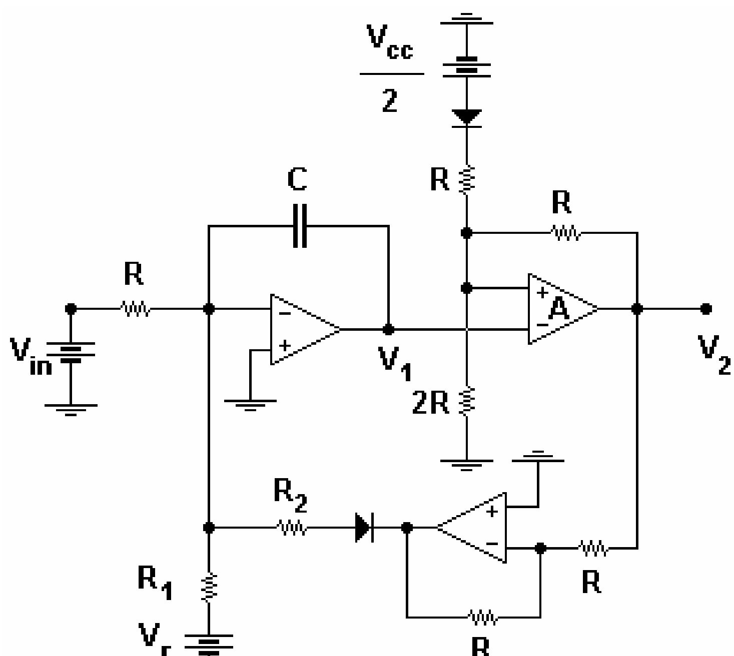
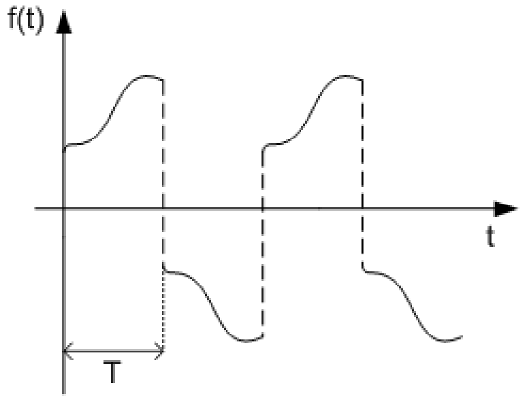
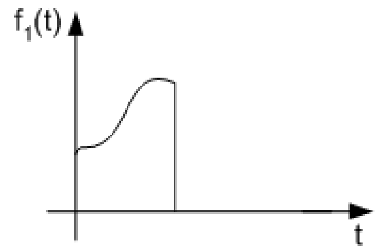


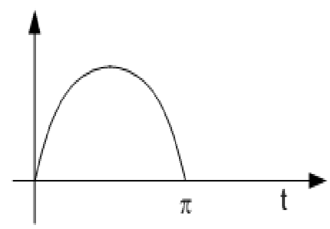
figura 3

<u>Pregunta 1</u> (10 puntos)

Sea f(t) periódica de período 2T, tal que f(t+T) = -f(t)





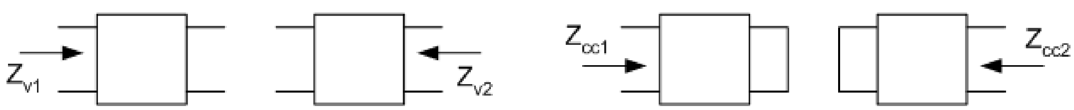


Sean $F(s) = L[f(t)]$
$F_1(s) = L[f_1(t)]$

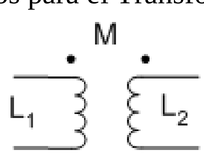
a) Hallar F(s) en function de $F_1(s)$. **(6)**
b) Calcular la Transformada de Laplace del pulso de sinusoide de la figura. **(4)**

<u>Pregunta 2</u> (10 puntos)

Dado un cuadripolo, se definen los parámetros Z_{v1}, Z_{v2}, Z_{cc1}, Z_{cc2}



a) Calcular esos 4 parámetros para el Transformador simple: **(3)**



b) Calcular los 4 parámetros en función de las constantes generales: A, B, C, D. **(3)**

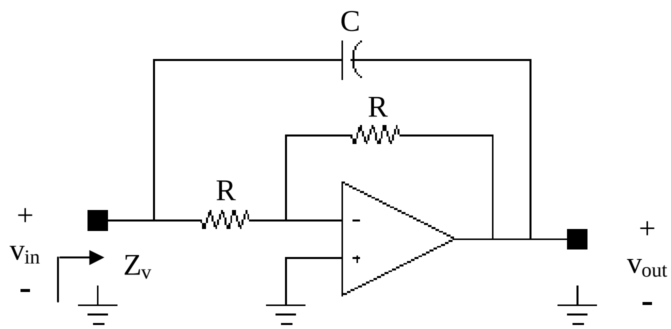
c) Probar que $\frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} = \frac{Z_{cc1}}{Z_{cc2}}$. **(2)**

d) Decir si esos 4 parámetros constituyen un juego válido para caracterizar un cuadripolo cualquiera. **(2)**

<u>Pregunta 3</u> (10 puntos)

a) Enunciar y demostrar el Teorema de Miller. **(6)**

b) En el circuito de la figura, <u>aplicando el Teorema de Miller</u>, hallar la impedancia vista por la fuente de entrada v_{in}. Explicar claramente como aplica el Teorema. **(4)**



<u>Pregunta 4</u> (10 puntos)

a) Definir la estabilidad BIBO de un sistema lineal. **(2)**

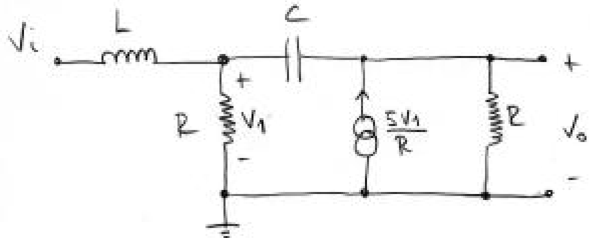
b) Enunciar una condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para el caso en que la respuesta al impulso del sistema es una función. **(3)**

c) **i)** Probar que si la transferencia del sistema es una función real racional estríctamente propia, entonces la condición de la parte **b)** es equivalente a que los polos de la transferencia estén en el semiplano complejo izquierdo abierto. **(4)**
ii) ¿Qué sucede en el caso en que la transferencia es simplemente una función real racional propia? **(1)**

SISTEMAS LINEALES 2: PAREXAMEN FEBRERO 2003

1

a (i)



$RC = \frac{L}{R} = \tau$

Planteando el nudo a la entrada: $\frac{V_i - V_1}{Ls} = \frac{V_1}{R} + (V_1 - V_o)Cs$

$V_i = V_1\left(1 + \frac{L}{R}s + LCs^2\right) - V_o LCs^2$

Planteando el nudo de salida: $(V_1 - V_o)Cs + \frac{5V_1}{R} = \frac{V_o}{R} \Rightarrow V_1\frac{(RCs+5)}{\cancel{R}} = V_o\frac{(1+RCs)}{\cancel{R}}$

$\Rightarrow V_i = V_o\left[\frac{1+RCs}{5+RCs}\left(\frac{R+Ls+RLCs^2}{R}\right) - LCs^2\right]$

$$V_i = V_o\left[\frac{R+Ls+RLCs^2 + R^2Cs + RLCs^2 + \cancel{R^2C^2Ls^3} - 5RLCs^2 - \cancel{R^2C^2Ls^3}}{R(5+RCs)}\right]$$

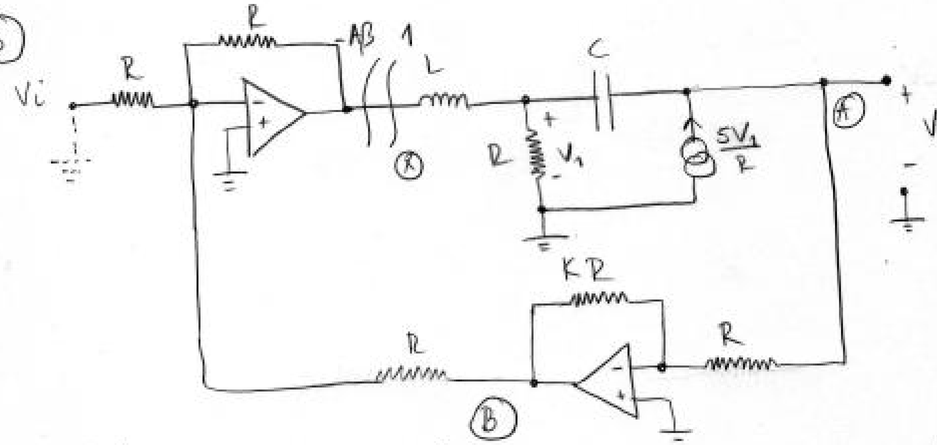
$\Rightarrow V_i = V_o\left[\frac{1 + \left(\frac{L}{R} + RC\right)s - 3LCs^2}{5+RCs}\right] \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{5+RCs}{-3LCs^2 + \left(\frac{L}{R}+RC\right)s + 1}}$

(ii) Utilizando que $RC = \frac{L}{R} = \tau \Rightarrow LC = \tau^2$, $H(s)$ puede escribirse como

$$\boxed{H(s) = \frac{\tau s + 5}{-3\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1}}$$

(iii) Sea $\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{\tau} \Rightarrow H(j\omega_0) = \frac{5+j\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}j+9} = \frac{5+j\sqrt{3}}{2(5+j\sqrt{3})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{H(j\omega_0) = \frac{1}{2}}$

b



Abro el lazo e inyecto una señal unitaria en ⊗. Se que a la vuelta tengo $-A\beta$.

(2)

Reconociendo el bloque de la parte anterior (la resistencia de salida está a tierra por la tierra virtual) se tiene que en (A) tengo H(s). Reconociendo la etapa inversora de ganancia K, en (B) tengo – KH(s). Finalmente y tras el último inversor se tiene que $\boxed{-A\beta = KH(s)}$

(c) Para el estudio de estabilidad realizamos en primer lugar los diagramas de Bode asintóticos de $A\beta(j\omega)$

$$A\beta(j\omega) = \frac{K}{3\tau}\,\frac{j\omega + \frac{5}{\tau}}{(j\omega)^2 - \frac{2j\omega}{3\tau} - \frac{1}{3\tau^2}}$$

Buscamos las raíces del denominador:

$$\omega = \frac{\frac{2}{3\tau} \pm \sqrt{\frac{4}{9\tau^2} + \frac{4}{3\tau^2}}}{2} \quad \begin{cases} \frac{1}{3\tau} + \frac{2}{3\tau} = \frac{1}{\tau} \\ \frac{1}{3\tau} - \frac{2}{3\tau} = -\frac{1}{3\tau} \end{cases}$$

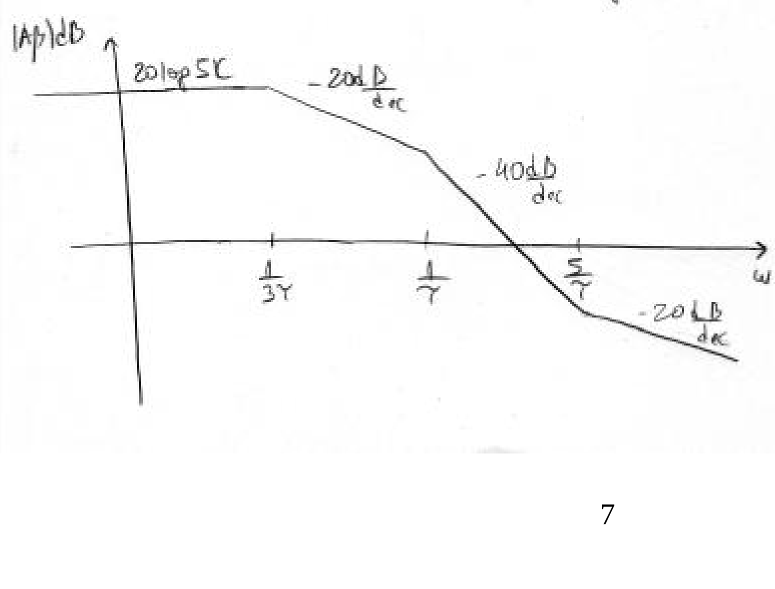
$$\Rightarrow A\beta(j\omega) = \frac{K}{3\tau}\,\frac{j\omega + \frac{5}{\tau}}{\left(j\omega - \frac{1}{\tau}\right)\left(j\omega + \frac{1}{3\tau}\right)}$$

Si $\omega \ll \frac{1}{3\tau} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -5K \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| = 20\log 5K \text{ dB} \\ \arg(A\beta) = \pi \end{cases}$

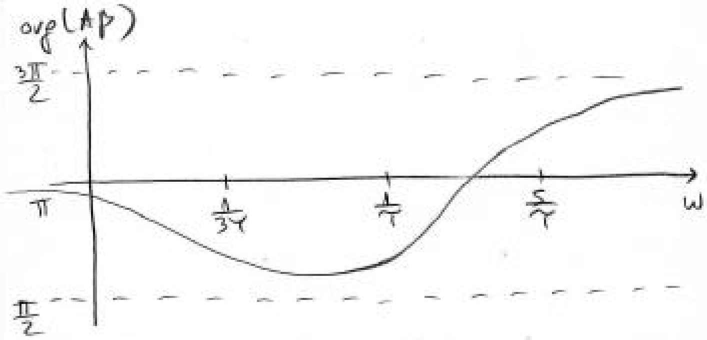
Si $\frac{1}{3\tau} \ll \omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{-5K}{3\tau j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| = 20\log \frac{5K}{3\tau} - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Si $\frac{1}{\tau} \ll \omega \ll \frac{5}{\tau} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{5K}{3\tau^2\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| \simeq 20\log \frac{5K}{3\tau^2} - 40\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) = \pi \end{cases}$

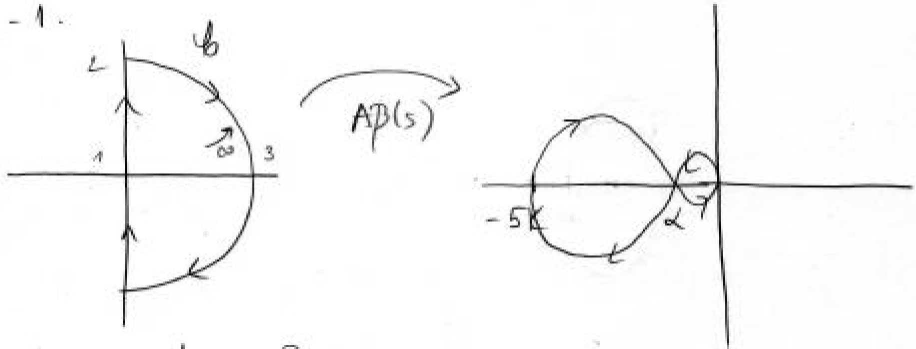
Si $\omega \gg \frac{5}{\tau} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{K}{3\tau j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| \simeq 20\log \frac{K}{3\tau} - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \simeq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$



3



Ahora podemos realizar el diagrama de Nyquist y ver cuantas vueltas da alrededor de -1.



Para la curva elegida $P=1$

De 1 a 2, uso la información del Bode.

De 2 a 3 se mapea al origen

El resto simetrico respecto al eje real.

Si se tiene que $\alpha < -1$, el Nyquist dará una vuelta antihoraria alrededor del -1

$\Rightarrow N = Z - P = -1 \Rightarrow Z = 0$ y el sistema resulta ESTABLE.

Pero de la parte ⓐ (iii) sabemos que a frecuencia $\omega_o = \frac{\sqrt{3}}{\tau} \Rightarrow H(j\omega_o) = \frac{1}{2}$

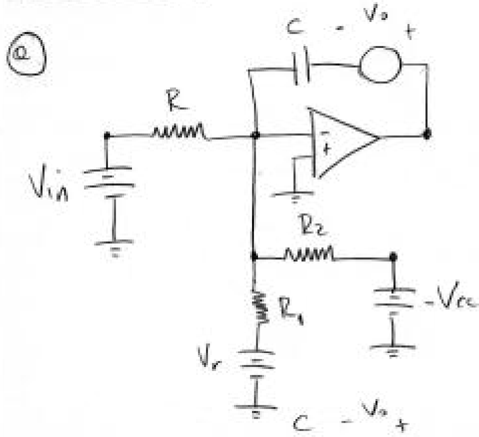
$\Rightarrow A\beta(j\omega_o) = -\frac{K}{2} = \alpha \Rightarrow -\frac{K}{2} < -1 \Rightarrow$ Si $\boxed{K > 2}$ es ESTABLE

Si $\boxed{K \leq 2}$ es INESTABLE

4

Ejercicio 2:

a)

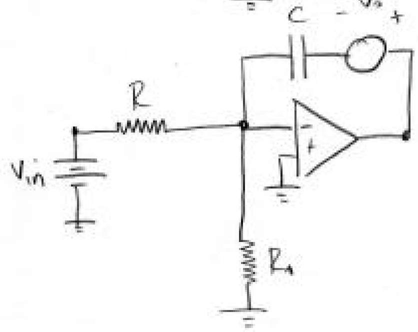


Planteando la ecuación de nudos se tiene:

$$\frac{V_{in}}{Rs} + \frac{V_r}{R_1 s} - \frac{V_{cc}}{R_2 s} = \left(\frac{V_o}{s} - V_{out}\right) Cs$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{out} = -\frac{V_{in}}{RCs^2} - \frac{V_r}{R_1 C s^2} + \frac{V_{cc}}{R_2 C s^2} + \frac{V_o}{s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{out}(t) = \left[V_o + \left(\frac{V_{cc}}{R_2} - \frac{V_{in}}{R} - \frac{V_r}{R_1}\right)\frac{t}{C}\right] Y(t)}$$

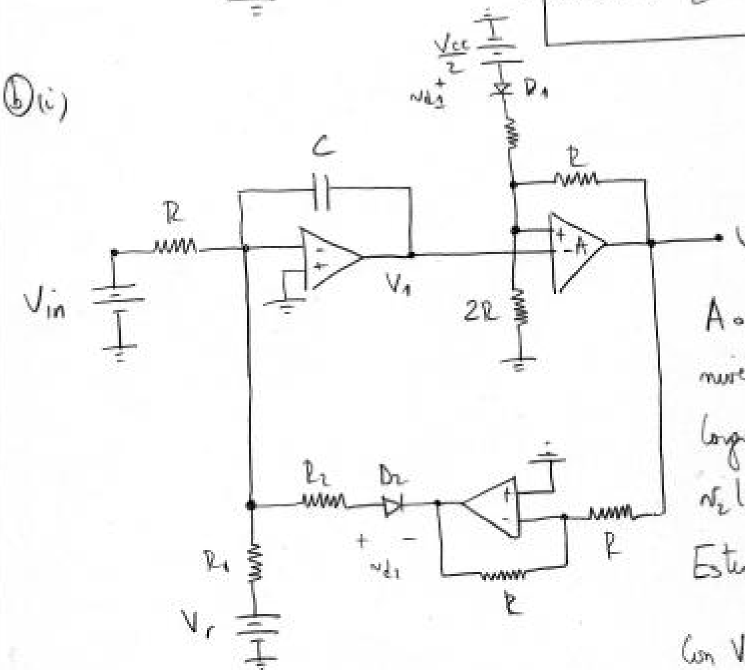


Igual que antes con $V_{cc} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V_{out} = -\frac{V_{in}}{RCs^2} - \frac{V_r}{R_1 C s^2} + \frac{V_o}{s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{out}(t) = \left[V_o - \left(\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}\right)\frac{t}{C}\right] Y(t)}$$

b) (i)



A operando en zona no lineal entre niveles $\pm V_{cc}$.

Carga inicial en el condensador C, $V_o = \frac{2V_{cc}}{3}$

$v_2(t=0) = -V_{cc}$

Estudiamos para $t \geq 0$, $\boxed{v_2(t) = -V_{cc} Y(t)}$

Con $V_2 = -\frac{V_{cc}}{s}$ supongo D_1 ON y D_2 OFF.

Es fácil de verificar que D_2 está OFF. En efecto, $v_{d2} = \underset{\text{tierra virtual}}{0} - (\underset{\text{inversor}}{+V_{cc}}) = -V_{cc} < 0$

Sean V_{A+} y V_{A-} las tensiones de entrada del comparador A. $V_{A-} = V_1$

Planteando la ecuación de nudo se tiene: $-\frac{V_{A+}}{2R} = \frac{V_{A+} + \frac{V_{cc}}{s}}{R} + \frac{V_{A+} - \frac{V_{cc}}{2s}}{R} \Rightarrow \frac{5}{2} V_{A+} = -\frac{V_{cc}}{2s}$

(5)

$\Rightarrow v_{A+}(t) = -\frac{V_{cc}}{5} Y(t)$.

Con D_2 OFF y reconociendo la segunda configuración de la parte anterior, se tiene que:

$$\boxed{v_1(t) = \left[\frac{2V_{cc}}{3} - \left(\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}\right)\frac{t}{C}\right] Y(t)}$$

El comparador A conmuta para $t = t_1 / v_1(t_1) = V_{A+} = -\frac{V_{cc}}{5}$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{13}{15} \frac{V_{cc}\, C}{\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}}}$$

Verifiquemos el supuesto sobre el diodo D_1: $i_{D1} = \dfrac{\frac{V_{cc}}{2} + \frac{V_{cc}}{5}}{R} > 0$

Estudiemos para $t' = t - t_1 \geq 0$, $\boxed{v_2(t') = V_{cc} Y(t')}$

Con $V_2 = -\frac{V_{cc}}{5}$ supongo D_1 OFF y D_2 ON. Nuevamente es inmediato verificar que D_2 está ON. $i_{D2} = \dfrac{\overset{\text{tierra virtual}}{0} - \overset{\text{inversor}}{(-V_{cc})}}{R} > 0$

Con D_1 OFF y por el divisor resistivo se tiene que: $V_{A+} = \frac{2V_{cc}}{3}$ $\Rightarrow v_{A+}(t') = \frac{2V_{cc}}{3} Y(t')$

Reconociendo la primer configuración de la parte anterior, con $V_0 = -\frac{V_{cc}}{5}$ se tiene:

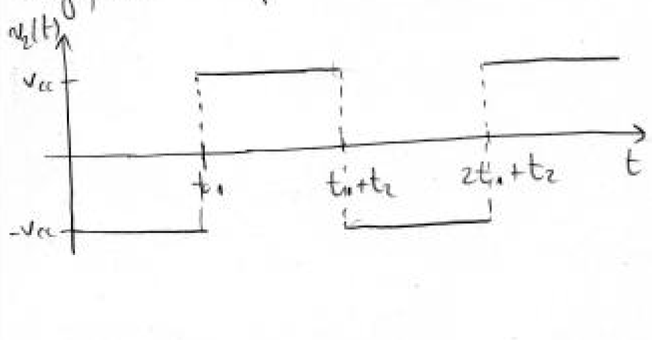
$$\boxed{v_1(t') = \left[-\frac{V_{cc}}{5} + \left(\frac{V_{cc}}{R_2} - \frac{V_{in}}{R} - \frac{V_r}{R_1}\right)\frac{t'}{C}\right] Y(t')}$$

El comparador A conmuta para $t' = t_2 / v_1(t_2) = V_{A+} = \frac{2V_{cc}}{3}$

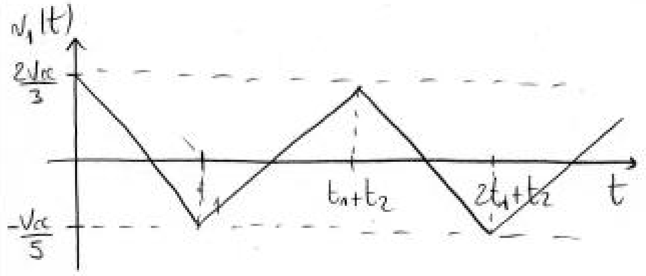
$$\Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{13}{15} \frac{V_{cc}\, C}{\frac{V_{cc}}{R_2} - \frac{V_{in}}{R} - \frac{V_r}{R_1}}}$$

Notar que es positivo por el dato de letra. Como la tensión en el condensador C es $V_0 = \frac{2V_{cc}}{3}$ el circuito entró en régimen

Verifiquemos el supuesto sobre D_1: $v_{D1} = \frac{V_{cc}}{2} - \frac{2V_{cc}}{3} < 0$



6



(ii) $T = t_1 + t_2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{13}{15} V_{cc} C \left[\frac{1}{\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}} + \frac{1}{\frac{V_{cc}}{R_2} - \frac{V_{in}}{R} - \frac{V_r}{R_1}} \right]}$

(iii) Debe cumplirse que:

$$\frac{1}{\cancel{C}}\left(\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}\right) = \frac{1}{\cancel{C}}\left(\frac{V_{cc}}{R_2} - \frac{V_{in}}{R} - \frac{V_r}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{2\left(\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}\right) = \frac{V_{cc}}{R_2}}$$