

Figure 1: Sistema realimentado de la parte e) del Problema X.

Problema X:

Considere los siguientes sistemas, de entrada $u(t)$, respuesta al impulso $h(t)$ y salida $r(t)$. Para cada uno de ellos, justificando claramente, indicar si es BIBO estable. En los casos que corresponda, discuta según el parámetro K .

- a) $H_a(s) = \frac{1}{s+5}$ b) $H_b(s) = \frac{(s-1)}{(s+10)(s+100)}$
- c) $H_c(s) = \frac{k}{(s-1)(s+10)}$ d) $h_d(t) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)} & , t \in [n, n + \frac{1}{2}] \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$
 $n = 0, 1, 2, \dots,$

e) el sistema realimentado de la figura 1, con:

$$H_1(s) = \frac{k}{(s+100)} \quad , \quad H_2(s) = \frac{(s+10)}{(s-1)^2}$$

Solución:

Cuando conocemos la respuesta al impulso del sistema y esta es una función, la estabilidad BIBO esta asociada al hecho de que la respuesta al impulso sea módulo integrable. Cuando conocemos la transferencia del sistema, para asegurar la estabilidad simplemente debemos mirar si no tiene polos en el semiplano derecho cerrado (incluyendo el eje imaginario).

- (a) Es estable pues tiene un único polo en $s = -5$.
- (b) Es estable pues sus polos son $s = -10$ y $s = -100$. El cero a la derecha ($s = 1$) no afecta la estabilidad.
- (c) Es inestable para todo k , pues presenta un polo en $s = 1$;
- (d) Miremos la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} |h_d(t)| dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} \quad \text{que diverge}$$

Entonces el sistema es inestable.

- (e) Para ver la estabilidad del sistema realimentado, usamos el Criterio de Nyquist. La transferencia de lazo abierto para $k = 1$ es:

$$-L(s) = -\frac{1}{K}H_1(s)H_2(s) = \frac{(s+10)}{(s-1)^2(s+100)}$$

La transferencia es propia, por lo que el comportamiento del Diagrama de Nyquist va a estar definido por $\{L(j\omega) : \omega = 0, \dots, +\infty\}$. Entonces construimos los Diagramas de Bode. Para obtener una aproximación asintótica, miremos las bandas de frecuencia:

$$- \omega \ll 1$$

$$L(j\omega) \approx \frac{(10)}{(-1)^2(100)} = \frac{1}{10}$$

$$- 1 \ll \omega \ll 10$$

$$L(j\omega) \approx \frac{(10)}{(j\omega)^2(100)} = \frac{1}{-10\omega^2}$$

$$- 10 \ll \omega \ll 100$$

$$L(j\omega) \approx \frac{(j\omega)}{(j\omega)^2(100)} = \frac{1}{j100\omega}$$

$$- 100 \ll \omega$$

$$L(j\omega) \approx \frac{(j\omega)}{(j\omega)^2(j\omega)} = -\frac{1}{\omega^2}$$

Los Diagramas de Bode reales se muestran en la figura 2. El Diagrama de Nyquist se muestra en

Para la estabilidad, la expresión $1+k.L(s)$ no puede tener ceros en el semiplano derecho cerrado. Contando las vueltas con signo N del Diagrama de Nyquist en torno al punto $-\frac{1}{k}$, se cumple que:

$$N = Z - P$$

con $P = 2$ (raíz 1 doble). Entonces, para tener estabilidad, debe ser $Z = 0$ y entonces debemos tener $N = -2$. De la observación del Diagrama de Nyquist y los Diagramas de Bode, vemos que es posible satisfacer esa condición. Busquemos una pareja $\alpha > 0$, $\tilde{\omega} > 0$ tal que

$$L(j\tilde{\omega}) = -\alpha = \frac{(j\tilde{\omega} + 10)}{(j\tilde{\omega} - 1)^2(j\tilde{\omega} + 100)} \Rightarrow (j\tilde{\omega} + 10) = -\alpha(j\tilde{\omega} - 1)^2(j\tilde{\omega} + 100)$$

Igualando partes real e imaginaria, obtenemos

$$\alpha \approx 4,5 \times 10^{-3} \quad , \quad \tilde{\omega} \approx 4,66$$

Para estabilidad, debe ser $-\alpha < -\frac{1}{k} \Rightarrow k > \frac{1}{4,5 \times 10^{-3}}$

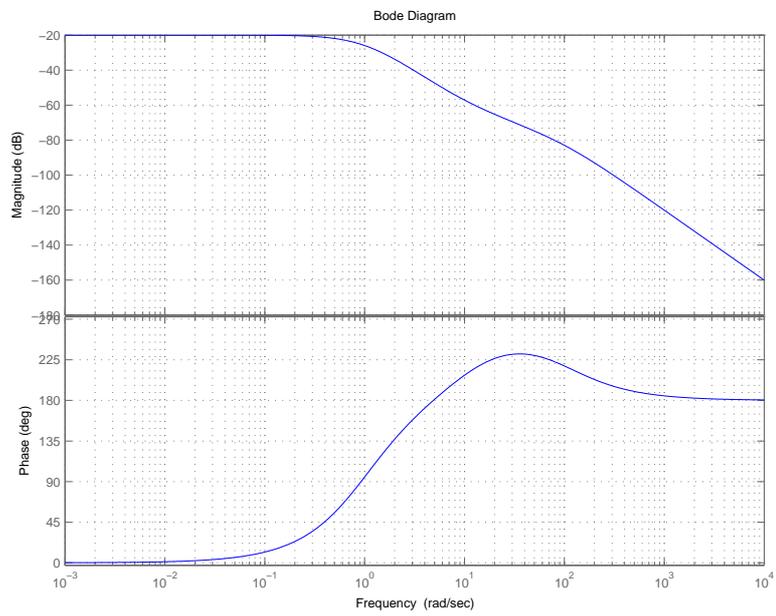


Figure 2: Diagramas de Bode reales de la parte ϵ).

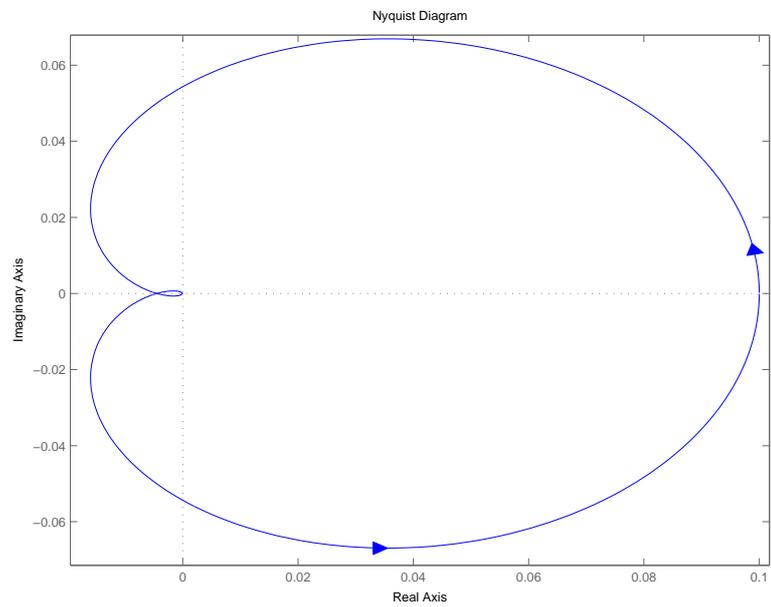
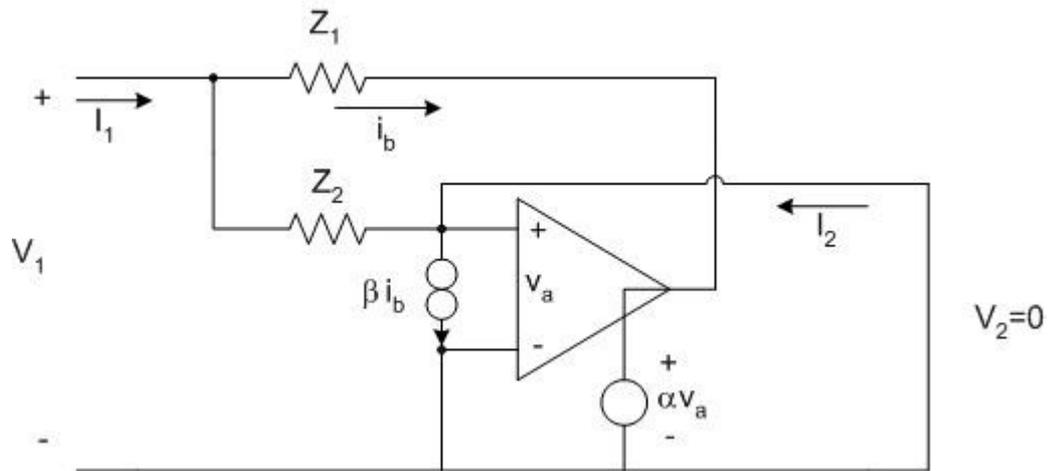


Figure 3: Diagrama de Nyquist de la parte ϵ).

Solución

Supongo primero $V_2 = 0 \Rightarrow h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \quad h_{21} = \frac{I_2}{I_1}$



$$V_a = V_2 = 0 \Rightarrow \alpha V_a = 0$$

Por Z_1 circula i_b 1) $V_1 = Z_1 i_b$

Por Z_2 circula $\frac{V_1}{Z_2}$ y en el nudo de entrada: 2) $I_1 = i_b + \frac{V_1}{Z_2}$

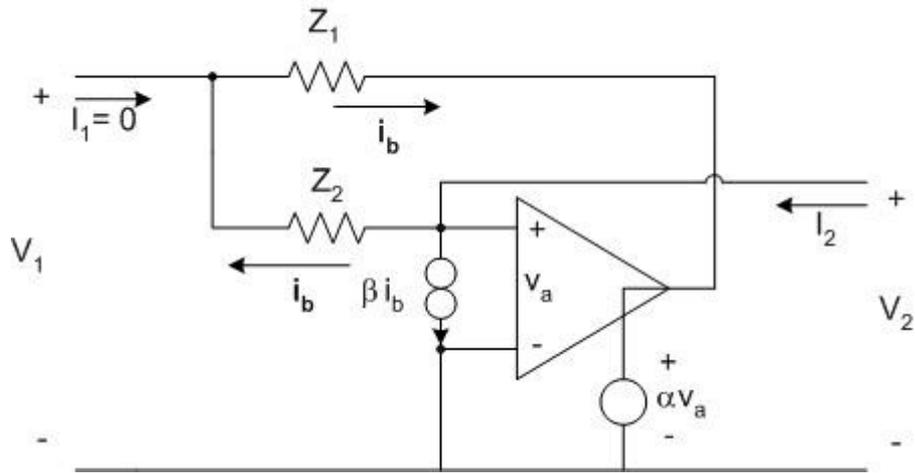
De 1) y 2): $I_1 = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_1}{Z_2} \Rightarrow h_{11} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

En el nudo de la entrada + del amplificador: $I_2 + I_1 - i_b = \beta i_b$

$$I_2 + I_1 = (\beta + 1)i_b = (\beta + 1)\frac{V_1}{Z_1} = (\beta + 1)\frac{h_{11}I_1}{Z_1}$$

$$I_2 = \left[\frac{(\beta + 1)h_{11}}{Z_1} - 1 \right] I_1 = \left[\frac{(\beta + 1)Z_2}{Z_1 + Z_2} - 1 \right] I_1 = \left[\frac{\beta Z_2 - Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right] I_1 \Rightarrow h_{21} = \frac{\beta Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Ahora supongo $I_1 = 0 \Rightarrow h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \quad h_{22} = \frac{I_2}{V_2}$



Si $I_1 = 0$, por Z_2 circula i_b

1) $v_a = V_2$

2) $V_1 = Z_1 i_b + \alpha V_2$

3) $V_1 = -Z_2 i_b + V_2$

4) $I_2 = (\beta + 1)i_b \Rightarrow i_b = \frac{I_2}{\beta + 1}$

2) $V_1 = \frac{Z_1 I_2}{\beta + 1} + \alpha V_2$

3) $V_1 = -\frac{Z_2 I_2}{\beta + 1} + V_2$

Igualando las expresiones de V_1 en 2) y 3):

$$\frac{Z_1 I_2}{\beta + 1} + \alpha V_2 = -\frac{Z_2 I_2}{\beta + 1} + V_2 \Rightarrow \frac{(Z_1 + Z_2)}{\beta + 1} I_2 = (1 - \alpha) V_2 \Rightarrow \boxed{h_{22} = \frac{(1 - \alpha)(\beta + 1)}{Z_1 + Z_2}}$$

Eliminando I_2 entre 2) y 3)

$$(Z_2 + Z_1) V_1 = (\alpha Z_2 + Z_1) V_2 \Rightarrow \boxed{h_{12} = \frac{\alpha Z_2 + Z_1}{Z_1 + Z_2}}$$

Sistemas Lineales 2 - Soluciones Segundo Parcial

Problema 3.-

(a) Debemos demostrar que existen $d_S > 0$, $d_L \geq 0$, tal que resuelven la siguiente ecuación:

$$jZ_S \tan(\beta d_S) \parallel Z_0 \frac{(Z_L + jZ_0 \tan(\beta d_L))}{(Z_0 + jZ_L \tan(\beta d_L))} = Z_0 ;$$

o equivalentemente, que la ecuación

$$-jY_S w + Y_0 \frac{((Z_0 - y_L v) + jx_L v)}{(x_L + j(Z_0 v + y_L))} = Y_0$$

en las variables $v, w \in \mathbb{R}$ tiene solución. En donde, $\tan(\beta d_L) = v$, y $\cot(\beta d_S) = w$. Ahora, de la parte real y de la parte imaginaria de la ecuación anterior, resulta que (v, w) resuelve esta ecuación si y solo si resuelve las siguientes dos ecuaciones:

$$Z_0(Z_0 - x_L)v^2 + 2Z_0y_Lv + y_L^2 - x_L(Z_0 - x_L) = 0 , \quad (1)$$

$$w = \frac{Z_S (Z_0y_Lv^2 + (x_L^2 + y_L^2 - Z_0^2)v - Z_0y_L)}{Z_0 (x_L^2 + y_L^2 + 2Z_0y_Lv + Z_0^2v^2)} . \quad (2)$$

Estas ecuaciones tienen solución, si y solo si la ecuación (1) tiene solución. Es fácil ahora ver que ecuación (1) efectivamente tiene solución. Debemos considerar dos casos: Caso $(Z_0 - x_L) = 0$. Es Obvio que en este caso existe $v \in \mathbb{R}$ que resuelve ecuación (1). Caso $(Z_0 - x_L) \neq 0$. Tenemos en este caso una ecuación de segundo grado en v cuyo discriminante es $\Delta = 4Z_0x_L((Z_0 - x_L)^2 + y_L^2) \geq 0$, de donde resulta que siempre existe $v \in \mathbb{R}$ que resuelve ecuación (1).

(b) Resolviendo en este caso las ecuaciones (1) y (2) tenemos que (en este caso) ellas poseen una única solución:

$$v = 1 , \quad w = 2 \frac{Z_S}{Z_0} ,$$

de donde resulta que la solución buscada es

$$d_L = \frac{\lambda}{8} , \quad d_S = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan\left(\frac{1}{2} \frac{Z_0}{Z_S}\right) .$$

(c) Usando la solución general para regimen sinusoidal

$$V(z) = V_+ e^{-j\beta z} + V_- e^{j\beta z} , \quad I(z) = \frac{1}{Z_0} (V_+ e^{-j\beta z} - V_- e^{j\beta z}) ,$$

e imponiendo las condiciones $V(0) = \frac{V}{2}$ y $I(0) = \frac{V}{2Z_0}$, resulta que $V_+ = \frac{V}{2}$ y $V_- = 0$. Así, $V(\frac{l}{2}) = \frac{V}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$, es decir

$$v\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{V}{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) , \quad t \geq 0 .$$

Ahora, a efectos de calcular $v(l, t)$, trabajamos sobre la segunda mitad de la linea, usando

$$V'(z) = V'_+ e^{-j\beta z'} + V'_- e^{j\beta z'} ,$$

donde imponiendo $V'(0) = \frac{V'}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$ y $\Gamma_L = \frac{V'}{V_+} e^{j\beta l}$, (calculamos V'_- y V'_+) resulta que $V'(\frac{l}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{2} V e^{-j \arctan(2)}$, es decir

$$v(l, t) = \frac{\sqrt{5}}{2} V \cos(\omega t - \arctan(2)) , \quad t \geq 0 .$$

2^{do} parcial 2008 - Problema X

Andres Alcarraz

28/11/2008

1.-

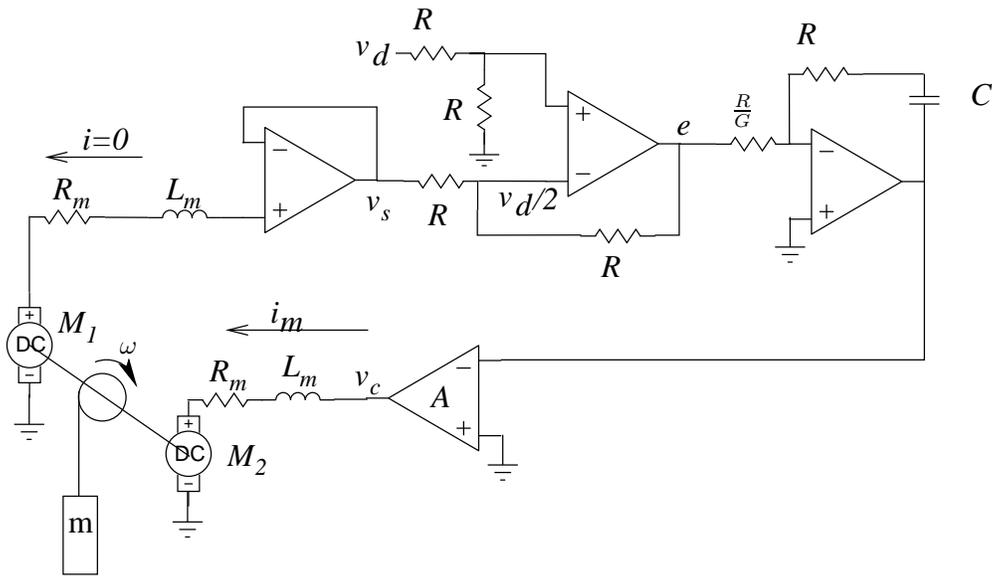


Figura 1.1: Esquema del sistema

El sistema de la figura 1.1 representa un sistema ascensor cuya velocidad se desea controlar mediante la entrada v_d . Para este sistema se consideraron como entradas el voltaje v_d y la masa m . Los motores/generadores de continua son idénticos de constante κ , las resistencias R_m y bobinas L_m representan la resistencia e inductancia interna del bobinado. Se recuerdan las ecuaciones del motor:

$$v_m = \kappa\omega \tag{1.1}$$

$$\tau = \kappa i_m \tag{1.2}$$

Donde ω se toma en el sentido de la figura para ambos motores y τ es el torque generado por los motores sobre el eje. El eje, junto con la polea y los rotores tiene un momento de inercia J , la masa del hilo es despreciable. También se tiene como dato que el disco tiene radio r .

a)

1 - Hallar $\Omega(s)$ (transformada de Laplace de $\omega(t)$) en función de $M(s)$ y $V_c(s)$ transformadas de Laplace de $m(t)$ y $v_c(t)$ respectivamente. Demostrar que $v_s = \kappa\omega$

De la segunda cardinal en el eje, ya planteada en Laplace y con el valor del torque de la ecuacion 1.2 para el motor 2 y el motor 1 (= 0):

$$Js\Omega = \kappa I_m - \frac{Mg}{r} \Rightarrow I_m = \frac{rJs\Omega + gM}{r\kappa} \quad (1.3)$$

Planteando la malla del motor 2 y usando 1.1:

$$V_c = (L_m s + R_m)I_m + \kappa\Omega \quad (1.4)$$

Despejando y sustituyendo 1.3 en 1.4

$$V_c = \left((L_m s + R_m) \frac{Js}{\kappa} + \kappa \right) \Omega + (L_m s + R_m) \frac{g}{r\kappa} M \Rightarrow \Omega = \frac{V_c - (L_m s + R_m) \frac{g}{r\kappa} M}{\frac{JL_m}{\kappa} s^2 + \frac{R_m J}{\kappa} s + \kappa} \quad (1.5)$$

Si resolvemos la malla del motor 1:

$$V_s = \kappa\Omega \quad (1.6)$$

Donde se uso que la impedancia de entrada del operacional es nula y por lo tanto tambien la caida en la resistencia y la inductancia.

ii - Hallar $e(t)$ en funcion de $\omega(t)$ y $v_d(t)$.

$$\frac{v_s - \frac{v_d}{2}}{R} = \frac{\frac{v_d}{2} - e}{R} \Rightarrow e(t) = v_d(t) - v_s(t)$$

iii - Hallar la transferencia $F_1(s) = \frac{V_c(s)}{E(s) \cdot (L_m s + R_m)}$ Usando la transferencia del inversor y del operacional de ganancia A nos queda:

$$F_1(s) = -A \times -\frac{R + \frac{1}{Cs}}{R \cdot (L_m s + R_m)} = AG \frac{s + \frac{1}{RC}}{s \cdot (L_m s + R_m)} \quad (1.7)$$

iv - Mostrar que el sistema se puede representar por un diagrama de bloques como el de la figura 1.2,

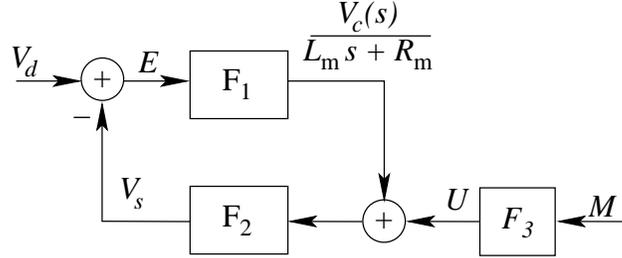


Figura 1.2: Diagrama de bloques del sistema

hallando F_1 , F_2 y F_3 de la ecuacion 1.5:

$$F_2 = \frac{1}{\frac{JL_m}{\kappa} s^2 + \frac{R_m J}{\kappa} s + \kappa} \quad (1.8)$$

$$F_3 = (L_m s + R_m) \frac{g}{r\kappa} \quad (1.9)$$

b)

i - Hallar V_s en funcion de $M(s)$ y $V_d(s)$, expresar el resultado en funcion de F_i , $i \in 1..3$

$$V_s = F_2 (F_3 M + F_1 (V_d - V_s)) \Rightarrow V_s (1 + F_2 F_1) = F_2 (F_3 M + F_1 V_d) \Rightarrow V_s = \frac{F_2 (F_3 M + F_1 V_d)}{1 + F_2 F_1} \quad (1.10)$$

ii - Asumiendo que el sistema en lazo cerrado es estable, demostrar que si las entradas tienden a un valor constante ($\lim_{t \rightarrow \infty} v_d(t) = V_0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = M_0$) y pertenecen a L_∞ entonces la velocidad angular tiende también a un valor constante $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \frac{V_0}{\kappa}$

Al ser el sistema estable en lazo cerrado podemos afirmar que los ceros de $1 + F_1 F_2$ están a la izquierda del eje imaginario.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Omega(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s V_s(s)}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F_2(s) (F_3(s) M(s) + F_1(s) V_d(s))}{1 + F_2(s) F_1(s)} \quad (1.11)$$

F_2 y F_3 son continuas en el origen:

$$F_2(0) = \frac{1}{\kappa}, \quad F_3(0) = \frac{R_m g}{r \kappa} \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{\kappa} \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F_2(s) (F_3(s) M(s) + F_1(s) V_d(s))}{1 + F_2(s) F_1(s)} = \frac{1}{\kappa} \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F_2(0) (F_3(0) M(s) + F_1(s) V_d(s))}{1 + F_2(0) F_1(s)} = \quad (1.13)$$

Multiplicando arriba y abajo por s

$$= \frac{1}{\kappa} \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s F_3(0) M(s) + s F_1(s) V_d(s)}{s \kappa + s F_1(s)} \quad (1.14)$$

De la ecuación 1.7:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F_1(s) = \frac{AG}{RC} \quad (1.15)$$

Aplicando el teorema del valor final a $m(t)$ y a $v_d(t)$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s M(s) = M_0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s V_d(s) = V_0 \quad (1.16)$$

Volviendo a 1.14

$$\frac{1}{\kappa} \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s F_3(0) M(s) + s F_1(s) V_d(s)}{s \kappa + s F_1(s)} = \frac{1}{\kappa} \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F_3(0) M_0 + \frac{AG}{RC} V_d(s)}{s \kappa + \frac{AG}{RC}} = \frac{1}{\kappa} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s F_3(0) M_0 + \frac{AG}{RC} s V_d(s)}{s \kappa + \frac{AG}{RC}} \quad (1.17)$$

$$= \frac{1}{\kappa} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{AG}{RC} s V_d(s)}{\frac{AG}{RC}} = \frac{1}{\kappa} \lim_{s \rightarrow 0} s V_d(s) = \frac{V_0}{\kappa} \quad (1.18)$$

c)

Estudiar la estabilidad del sistema en lazo cerrado utilizando el criterio de Nyquist conociendo los siguientes datos.

$$\omega_0 = \frac{\kappa}{\sqrt{L_m J}}, \quad \frac{1}{RC} = 100 \omega_0, \quad \frac{R_m}{L_m} = \omega_0$$

Discutir según G en función de los restantes parámetros del sistema.

$$L(s) = F_1(s) F_2(s) = AG \frac{s + 100 \omega_0}{s} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0} + 1} \quad (1.19)$$

A partir de los diagramas de Bode de la figura 1.3 y del mapeo $L(re^{j\theta})$ con $r \rightarrow 0$ y θ llenando de 0 a $\frac{\pi}{2}$ construimos el diagrama de Nyquist de la figura 1.4.

Por el diagrama de Bode observamos que la frecuencia a la cual el diagrama corta el eje real está cerca de ω_0 , como los polos están bastante separados (2 décadas) es una buena aproximación decir que la frecuencia de corte con el eje real es ω_0 . Por lo que tenemos que hallar $L(j\omega_0)$

$$L(j\omega_0) \simeq AG \frac{100 \omega_0}{j \omega_0} \frac{1}{\frac{j \omega_0}{\omega_0}} = -100 AG \quad (1.20)$$

Para que el sistema sea estable según el criterio de Nyquist $N = 0$ por lo que $L(j\omega_0)$ tiene que estar a la derecha del $(-1, 0)$.

$$L(j\omega_0) \simeq -100 AG > -1 \Rightarrow G < \frac{1}{100A} \quad (1.21)$$

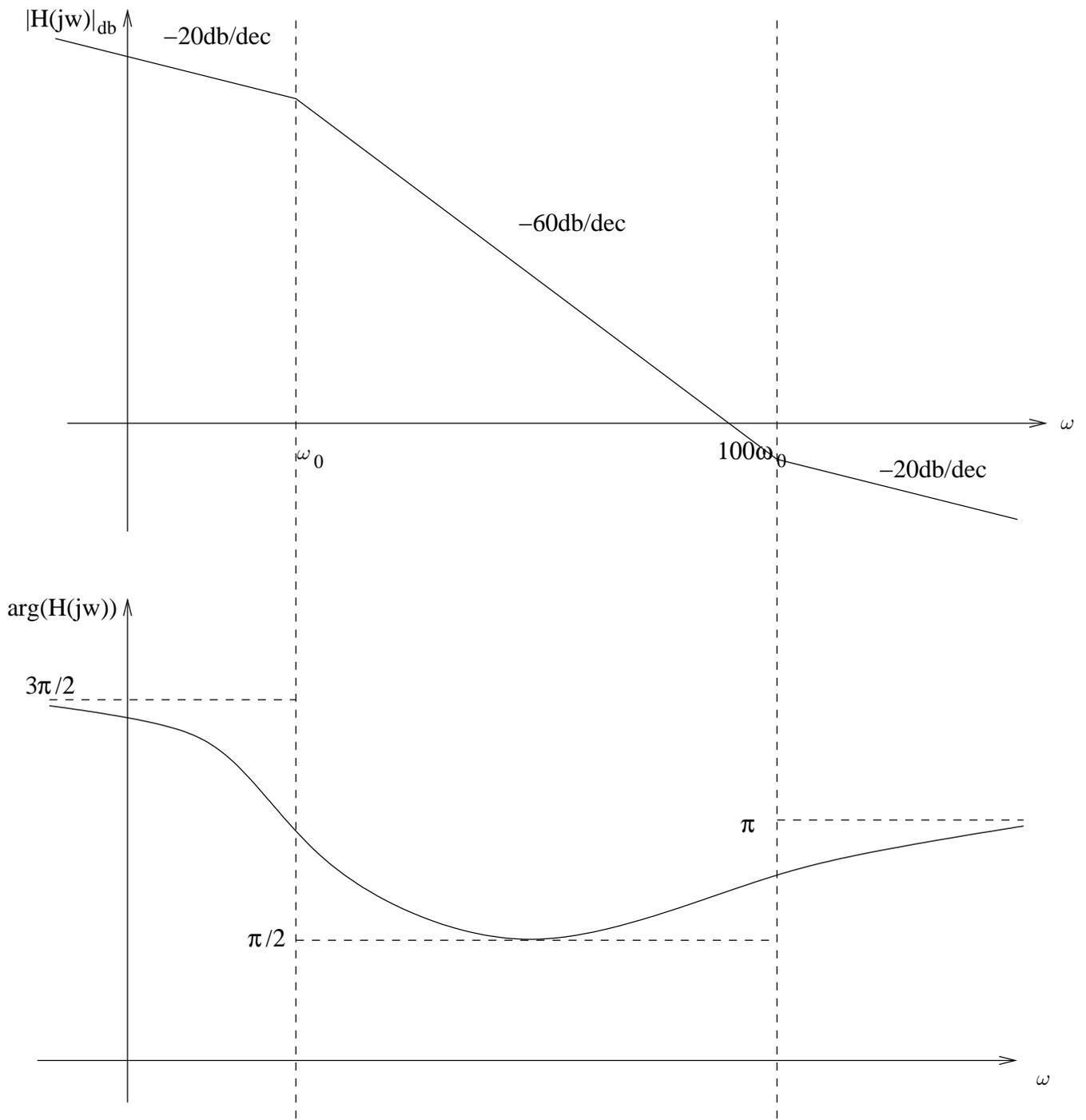


Figura 1.3: diagramas de Bode

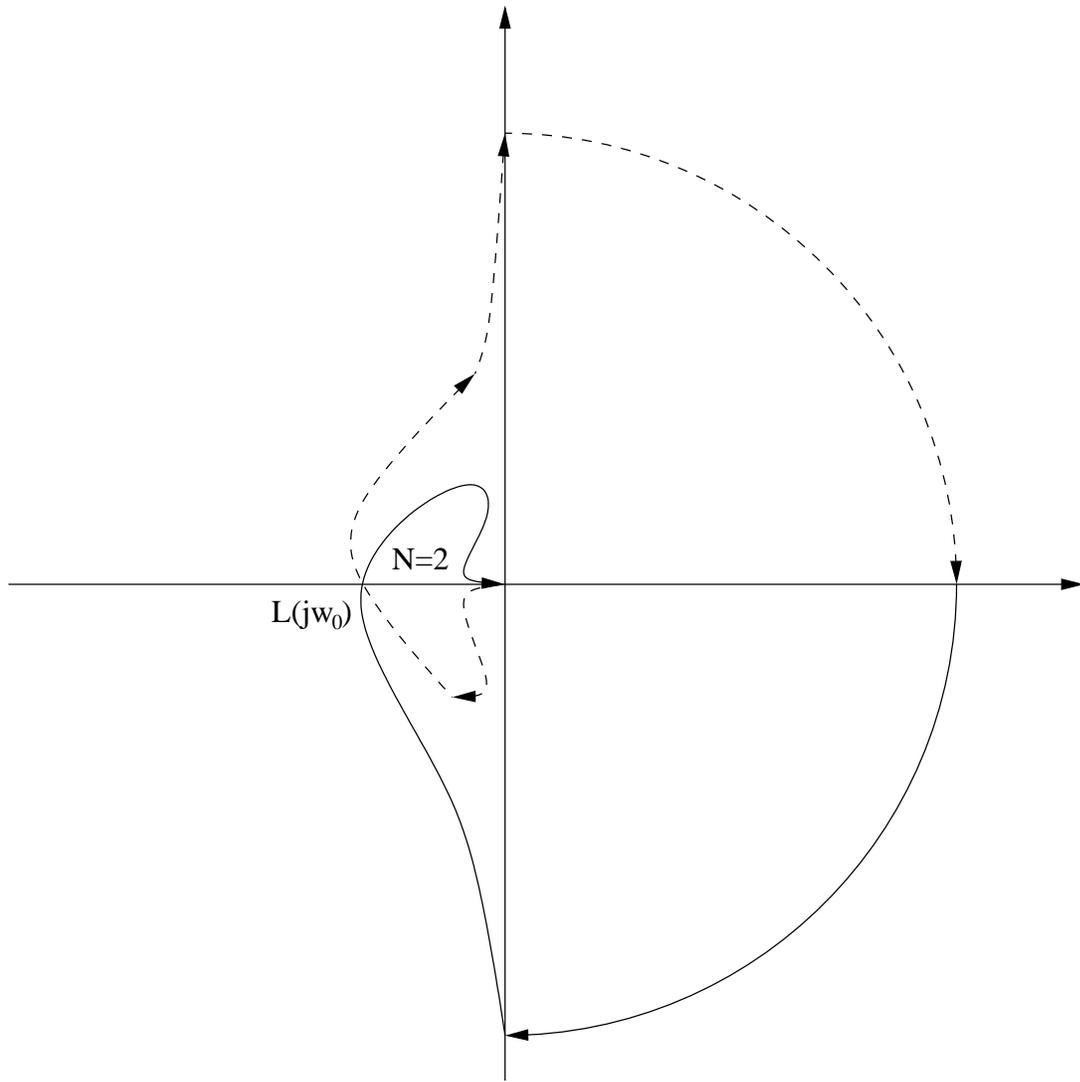


Figura 1.4: diagrama de Nyquist