Respuesta temporal, Sistemas de orden 1

Transparencias
Introducción a la Teoría de Control

R. Canetti 2013

RESPUESTA TEMPORAL

¿Cómo responde un sistema dinámico lineal, de parámetros concentrados, invariante en t, de *una entrada – una salida*, a una entrada dada?

La solución puede obtenerse a través de la Transformada de Laplace:

si: $\begin{cases} U(s) = \mathcal{L}\{\, u(t) \,\} \\ Y(s) = \mathcal{L}\{\, y(t) \,\} \end{cases}$ entonces: $\boxed{Y(s) = H(s)\,.\,U(s)}$ $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\, Y(s)\}$

Cuando H y U son reales racionales y propias:

si: $\begin{cases} H(s) = \dfrac{n_h(s)}{d_h(s)} \\ \\ U(s) = \dfrac{n_u(s)}{d_u(s)} \end{cases}$ entonces: $\boxed{Y(s) = \dfrac{n_h(s)}{d_h(s)}\,\dfrac{n_u(s)}{d_u(s)} = \dfrac{n(s)}{d(s)}}$

El problema de encontrar la salida del sistema se transforma en :

¿Cómo es la antitransformada de Laplace de un cociente de polinomios?

¿ y(t) ? $\Rightarrow$ $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{n(s)}{d(s)} \right\}$$

Sean H(s) y U(s):

$$H(s)=\frac{n_h(s)}{d_h(s)}=\frac{a_h*\prod_{i=1}^{m_h}\left(s-z_i^h\right)}{\prod_{j=1}^{n_h}\left(s-p_j^h\right)} \quad U(s)=\frac{n_u(s)}{d_u(s)}=\frac{a_u*\prod_{i=1}^{m_u}\left(s-z_i^u\right)}{\prod_{j=1}^{n_u}\left(s-p_j^u\right)}$$

Entonces:

$$Y(s)=H(s)\cdot U(s)=\frac{n(s)}{d(s)}=\frac{a*\prod_{i=1}^{m}\left(s-z_i\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(s-p_j\right)}$$

con $m=m_h+m_u$ $m=n_h+n_u$ $m\leq n$

Descomponiendo Y(s) = n(s) / d(s)   en fracciones simples:

$$Y(s)=A+\underbrace{\frac{A_1^1}{(s-p_1)}+\frac{A_1^2}{(s-p_1)^2}+\ldots+\frac{A_1^{\mu_1}}{(s-p_1)^{\mu_1}}}_{\text{polo } p_1}+\ldots\quad \ldots+\underbrace{\frac{A_g^1}{(s-p_g)}+\frac{A_g^2}{(s-p_g)^2}+\ldots+\frac{A_g^{\mu g}}{(s-p_g)^{\mu g}}}_{\text{polo } p_g}$$

Donde hay g polos distintos: $p_1 \ldots p_g$ con multiplicidad $\mu_1 \ldots \mu_g$ respectivamente y los coeficientes *A* son reales para polos reales y complejos para polos complejos no reales.

Si $m<n$ entonces *A* = 0.

$$y(t)=A\delta_t+\underbrace{\frac{A_1^1}{1}e^{p_1 t}+\frac{A_1^2}{1!}te^{p_1 t}+\ldots+\frac{A_1^{\mu_1}}{(\mu_1-1)!}t^{\mu_1-1}e^{p_1 t}}_{\text{polo } p_1}+\ldots+\underbrace{\frac{A_g^1}{1}e^{p_g t}+\frac{A_g^2}{1!}te^{p_g t}+\ldots+\frac{A_g^{\mu_g}}{(\mu_g-1)!}t^{\mu_g-1}e^{p_g t}}_{\text{polo } p_g}$$

A excepción del término impulsivo,

- La salida es siempre una combinación lineal de potencial-exponenciales complejas.
- Cada polo (de la planta o de la entrada) aporta un término. Los polos repetidos aportan tantos términos como su orden de multiplicidad.
- La forma cualitativa de la respuesta depende solo de la posición de los polos de la salida.
- El peso relativo de cada aporte está dado por los coeficientes A. Esos dependen de la posición relativa de los polos y ceros de la salida (es decir de la planta y la entrada)

Habrá cierto número $r \leq g$ de polos reales p_i distintos o parejas distintas de polos complejos conjugados $\{ p_i, \overline{p_i} \}$, con multiplicidad $\mu_1 \ldots \mu_r$ respectivamente.

Si ahora sumamos de dos en dos los aportes de las parejas de polos complejos conjugados para cada t^j , como los coeficientes respectivos :

$\dfrac{A_i^{j+1}}{j!}$ de los términos $\dfrac{A_i^{j+1}}{j!} t^j e^{p_i t}$ deben ser complejos conjugados, entonces:

$$\boxed{y(t) = A\,\delta(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} \alpha_{ij} e^{\sigma_i t} \; t^j \; sen(\omega_i t + \varphi_{ij})}$$

α_{ij} , φ_{ij} , son constantes reales.

p_i, $i = 1 \ldots r$ son los r polos reales $p_i = \sigma_i$

o parejas de polos complejos conjugados $\sigma_i \pm j\,\omega_i$

Obviamente, para los polos reales no aparece el factor sinusoidal.

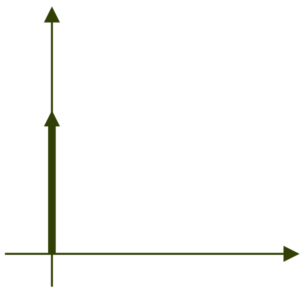
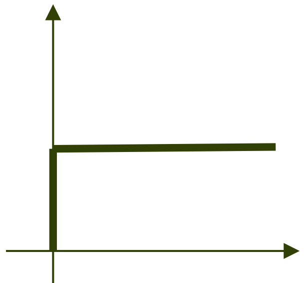
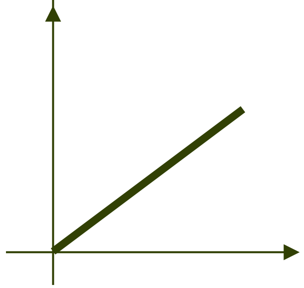
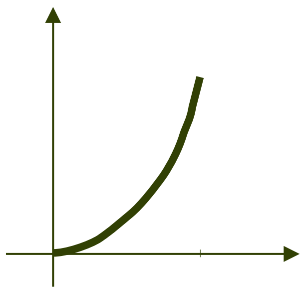
<u>**Respuesta a entradas estándard.**</u>

Estudiaremos las respuestas del sistema a un conjunto de señales estándard. Estas son:

Impulso	δ (t)
Escalón	Y(t)
Rampa	t Y(t)
Rampa cuadrática	t^2 Y(t)

La respuesta a estas señales son importantes por varias razones. Entre otras:

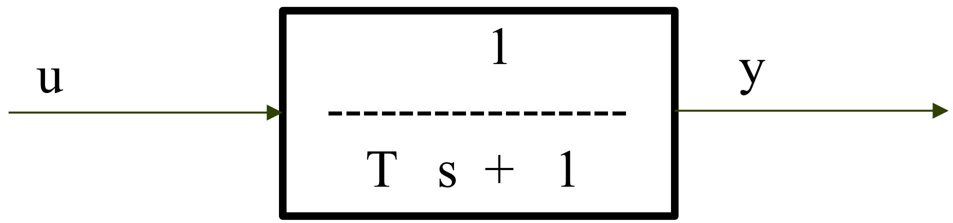
- En algunos casos (p. ej.: resp. a impulso, resp. a escalón) <u>caracterizan al sistema</u>.
- La respuesta a escalón determina el comportamiento transitorio en los problemas de <u>regulación</u>.
- Las respuestas a rampa y rampa cuadrática caracterizan el comportamiento en problemas típicos de <u>seguimiento</u>: a problemas de movimiento uniforme, o uniformemente acelerado.
- Señales más complejas pueden aproximarse en un período de tiempo por $u(t) = a + b\, t + c\, t^2 + \ldots$

	Señal	u(t)	U(s)
	Impulso	$\delta\ (t)$	1
	Escalón	Y(t)	$\frac{1}{s}$
	Rampa	t Y(t)	$\frac{1}{s^2}$
	Rampa cuadrática	t^2 Y(t)	$\frac{2!}{s^3}$

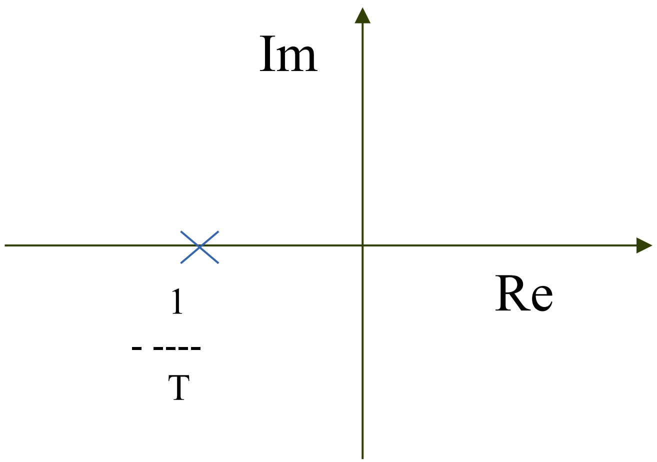
<u>Respuesta del Sistema de Primer orden</u>

Si el sistema es de primer orden, de la forma:

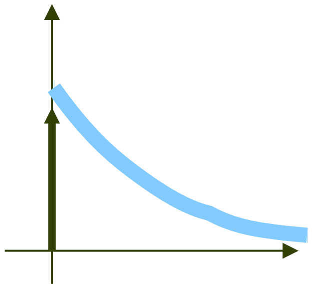
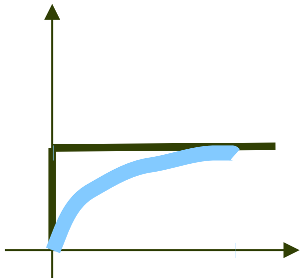
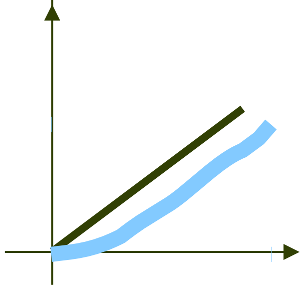
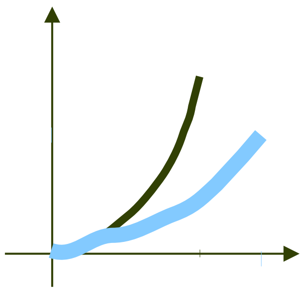
$$H(s) = \frac{1}{T s + 1}$$



Su patrón de polos y ceros es:



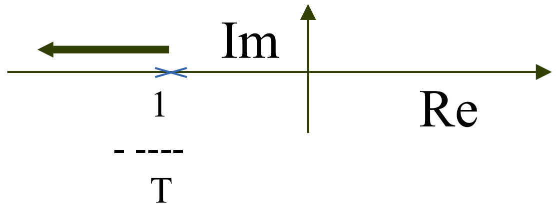
Entonces las respuestas de este sistema a las señales de entrada estándard son:

u(t)	U(s)	Y(s)=H(s)U(s)	y(t)
$\delta(t)$	1	$\dfrac{1}{Ts+1}$	$\dfrac{1}{T}\, e^{-t/T}$
$Y(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{1}{s\,(Ts+1)}$	$1 - e^{-t/T}$
$t\,Y(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{1}{s^2\,(Ts+1)}$	$t + T\,(e^{-t/T} - 1)$
$t^2\,Y(t)$	$\dfrac{2!}{s^3}$	$\dfrac{2!}{s^3\,(Ts+1)}$	$t^2 - 2\,T\,t - 2\,T^2\,(1 - e^{-t/T})$

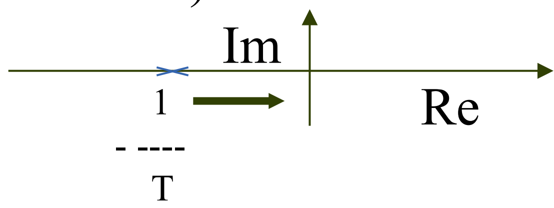
Comentarios:

1) Observar el **efecto de aumentar o disminuir T** (acercar el polo del sistema al origen o alejarlo).



<u>**Si T disminuye**</u> (polo más lejano al origen):

- **la respuesta es más rápida** (el transitorio debido al polo -1/T se extingue más rápidamente)
- **el "error" se reduce** (son interacciones entre los polos de la entrada y de sistema)
- **se "parece más" a la entrada** (el sistema 1/(Ts+1) se parece más a "1")

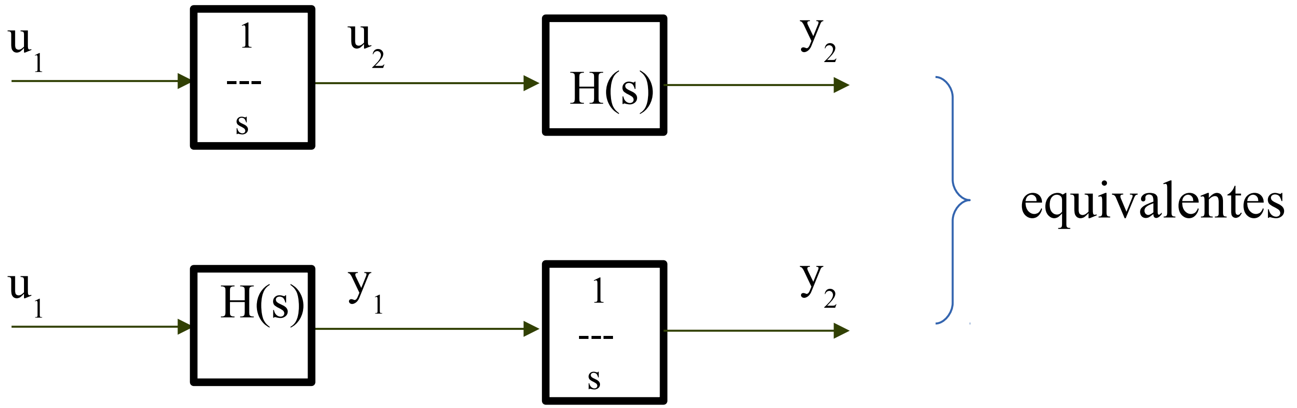


<u>**Si T aumenta**</u> (polo más cercano al origen):

- **la respuesta es más lenta** (el transitorio debido al polo -1/T se extingue más lentamente)
- **el "error" aumenta** (son interacciones entre los polos de la entrada y de sistema)
- **se "parece menos" a la entrada** (el sistema 1/(Ts+1) se parece menos a "1")

Si se considera la sucesión de entradas (t), Y(y), t Y(t), t^2 Y(t), ...

2) Cada respuesta es la integral de la respuesta anterior
Es que cada entrada es la integral de la entrada anterior



3) El "error" de cada respuesta es la integral del "error" de la respuesta anterior.

4) Si para cierta entrada se alcanza un "error" asintótico no nulo

⇒ para la siguiente entrada el "error" diverge !

Respuesta a escalón

Respuesta del sistema frente a una entrada escalón unitario $u(t) = Y(t)$

Algunos parámetros de la respuesta a escalón son una forma usual de especificar características de la respuesta transitoria o índices de desempeño en el dominio del tiempo.

Para una respuesta a escalón como la de la figura, se definen:

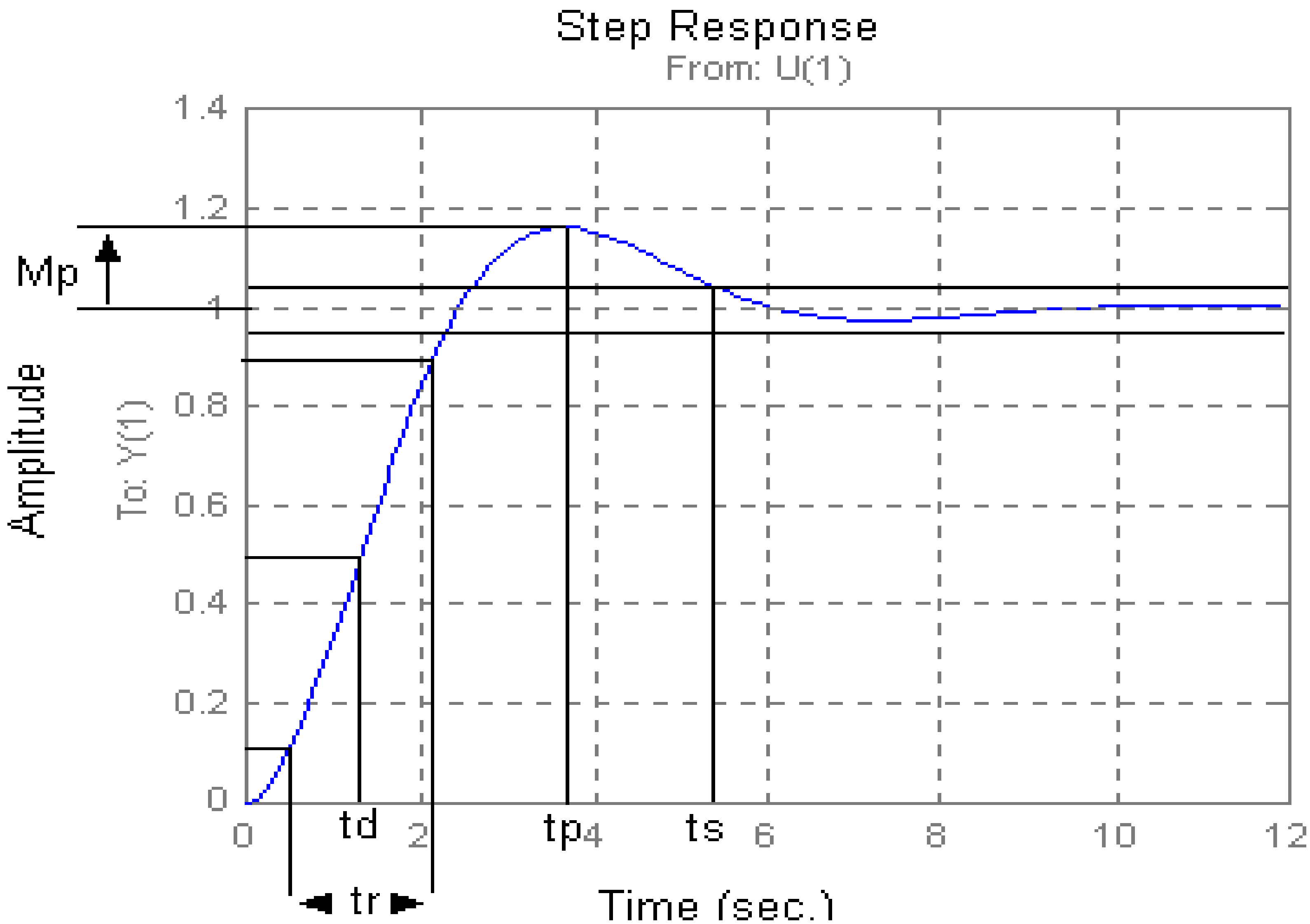
Mp -**Sobretiro**: exceso de la salida por arriba de su valor asintótico final (%)

$\mathbf{t_d}$ - **Retardo**. Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar el 50% del valor final

$\mathbf{t_r}$ - **Tiempo de levantamiento**. Tiempo que tarda la respuesta en pasar del 10% al 90% del valor final.

$\mathbf{T_s}$ - **Tiempo de asentamiento**. Tiempo a partir del que la respuesta no se aparta más del 5% de su valor final.

$\mathbf{T_p}$ - **Tiempo de pico**. Tiempo en el que ocurre el valor máximo de la salida.



Step Response
From: U(1)
Amplitude
To: Y(1)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Mp
td
tp
ts
tr
0
2
4
6
8
10
12
Time (sec.)

Ejemplo: Control de un motor

Veamos un primer ejemplo de diseño de un controlador. Consideremos un motor de corriente contínua. La entrada será la tensión aplicada, y la salida la velocidad angular.

Supongamos que su función de transferencia es

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

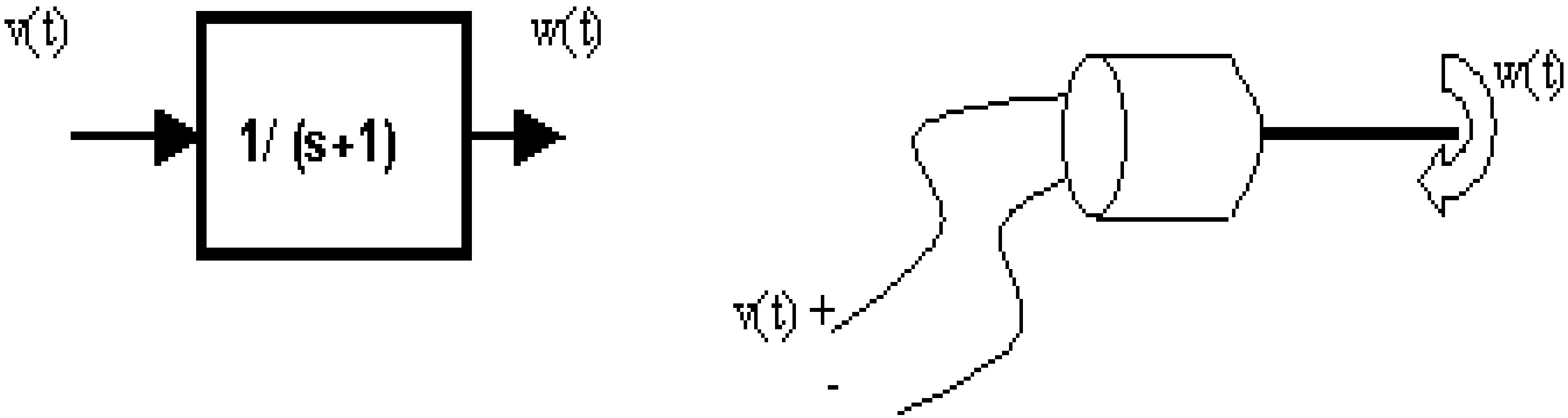


Figura 1

La Figura 2 muestra la respuesta a escalón del motor. Su “velocidad” medida por su tiempo de asentamiento es de 3 segundos para llegar a la vecindad (5 %) de su valor asintótico final.

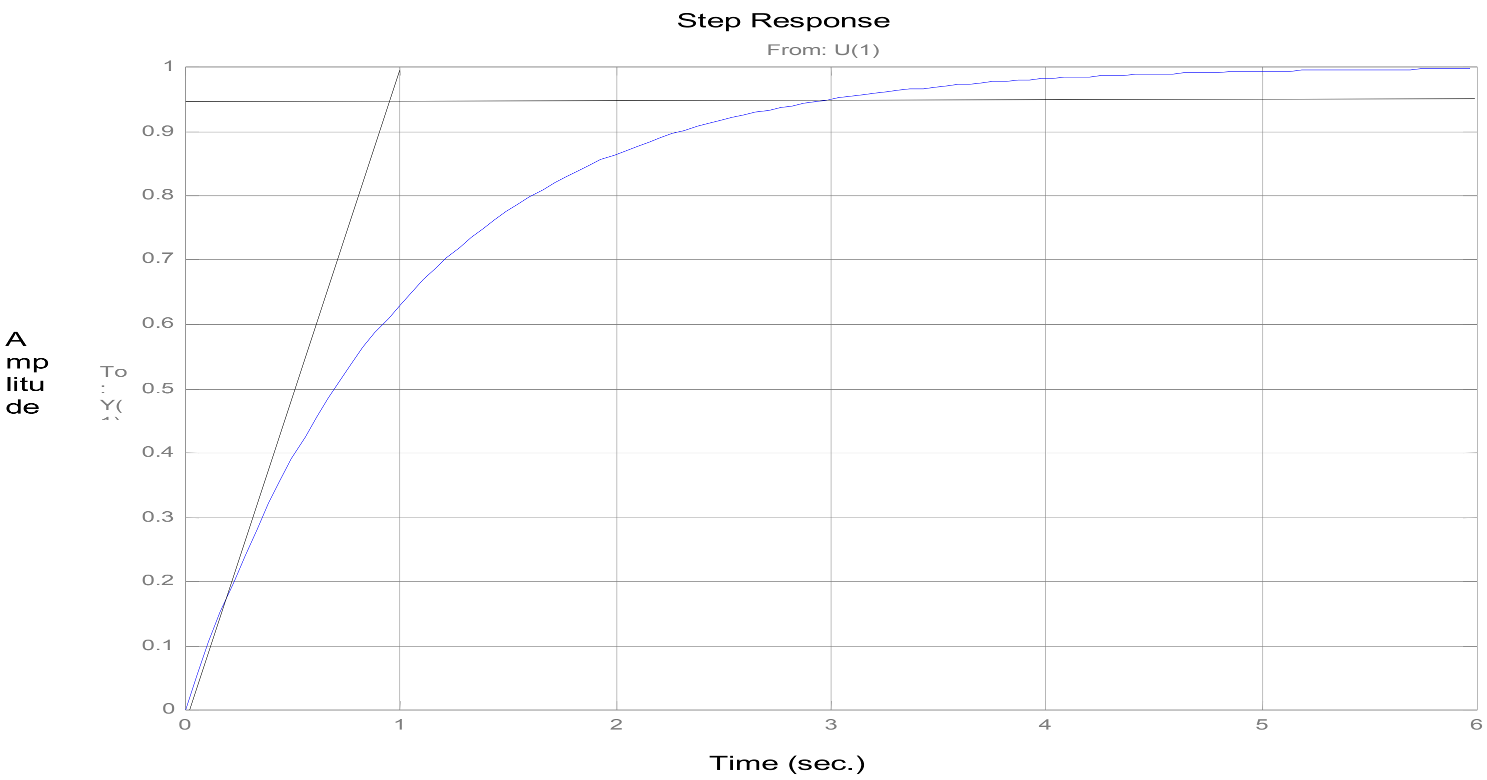
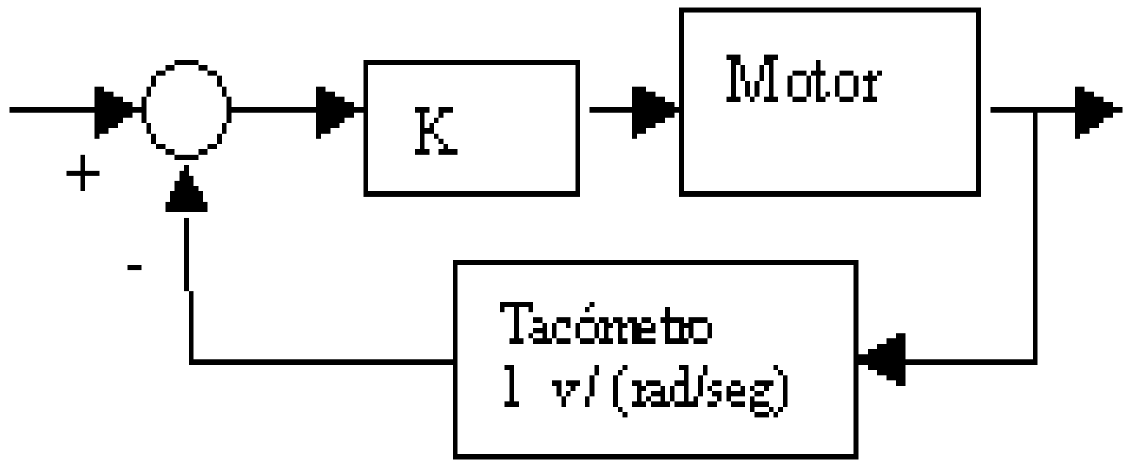


Figura 2

Nos proponemos diseñar un controlador de modo de <u>mejorar la velocidad de respuesta</u> del sistema controlado, y llevarlo a tener un <u>tiempo de asentamiento de 0.2 s.</u>

Se propone para ello un sistema de control realimentado como la figura . Esta estructura se denomina de realimentación unitaria con controlador Proporcional.



El problema del diseño del controlador pasa a ser : encontrar K que haga que ts = 0.2 seg.
La transferencia del lazo cerrado es:

$$G(s) = \frac{KH(s)}{1+KH(s)} = \frac{K}{s+K+1}$$

Luego, como $t_S = 3 * \frac{1}{K+1}$, si $t_S < 0.2 \Rightarrow K \geq 14$

La Figura 3 muestra la respuesta a escalón del sistema realimentado, con K=14. Se la compara con la respuesta a escalón original del motor.

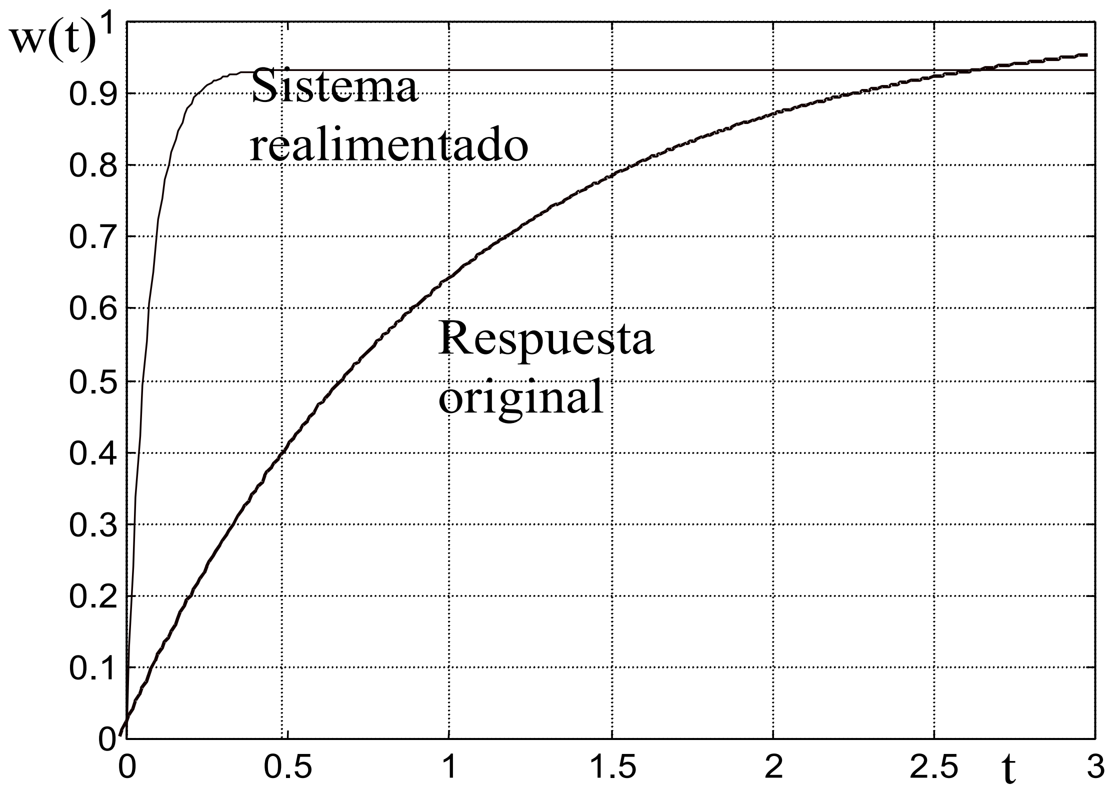
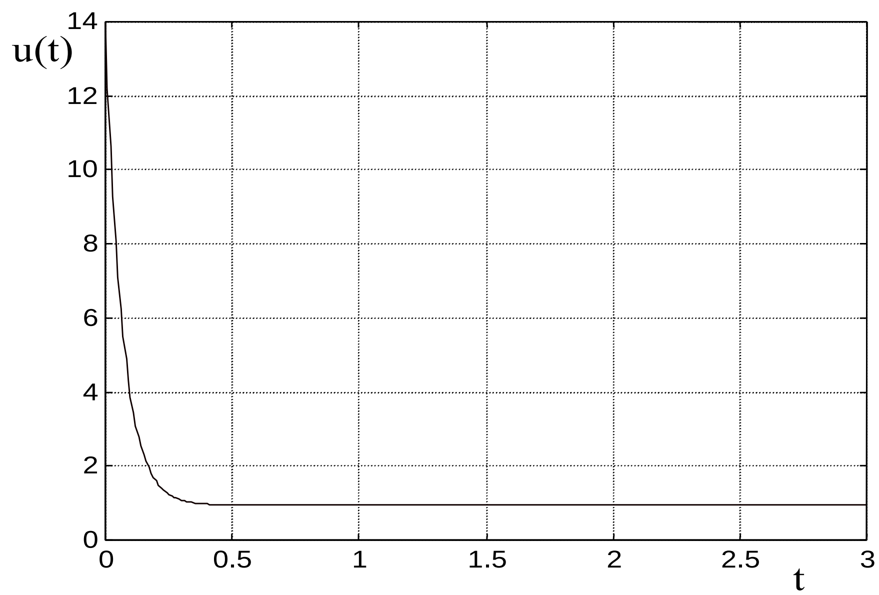


Figura 3

Se nota la mejora obtenida con el controlador proporcional. La velocidad de respuesta fue sensiblemente mejorada.

¿Cómo se consiguió esta mejora?

Se observa la salida del controlador cuando r(t) es un escalón. Puede verse que mientras que en el motor sin realimentar su entrada era de 1V, constante, con el controlador Proporcional la entrada al motor (salida del controlador) llega a 14V en los primeros instantes. En efecto, el controlador recibe la señal e(t), diferencia entre la entrada que quiere seguir y la velocidad que realmente mide. Le entrega al motor una tensión K veces mayor que esa diferencia. Al principio, cuando este “error” es máximo, el voltaje del motor es entonces K veces mayor que la amplitud del escalón, consiguiendo una subida bastante más rápida que en el sistema sin control. Conforme la velocidad aumenta, el voltaje al motor disminuye, hasta alcanzar un valor de régimen.



En resumen:

- mejoramos la velocidad del sistema
- a costa de una señal de control (u(t))