Tópicos de control
Parte 1

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales
Primer semestre - 2025

Contenido

Introducción

- Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(x,u) \quad , \quad f(0,0) = 0$$

donde suponemos que los valores que toman las acciones de control u pertenecen a un conjunto $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^m$ de acciones admisibles.

- Una realimentación de estados es una acción de control de la forma $u = \Phi(x)$ $(\Phi(0) = 0)$. Decimos que es estabilizante si el origen es un atractor del sistema en lazo cerrado.
- Las funciones son tales que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x, \Phi(x))$$

tiene solución única, dada la condición inicial.

- A continuación, veremos muy brevemente distintas maneras de enfocar el problema.

Linealización (Khalil, capítulo 11 (2a Ed.).)

$\dot{x} = f(x, u)$

- Definamos $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$.
- El sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$ aproxima al no lineal en un entorno del origen.
- Si (A, B) es controlable, podemos encontrar una realimentación de estados lineal $u(x) = Kx$, tal que $A + BK$ sea Hurwitz.
- Veremos que este controlador estabiliza localmente al sistema no lineal.

Linealización

$\dot{x} = f(x,u) \Rightarrow (\dot{\delta x}) = A\delta x + B\delta u$

- Propongamos una candidata a función de Lyapunov de la forma $V(\delta x) = (\delta x)^T P(\delta x)$.
- Si derivamos la función sobre las trayectorias del sistema lineal, obtenemos la siguiente condición:

$$(A+BK)^T P + P(A+BK) = A^T P + PA + K^T B^T P + PBK$$

- Podemos diseñar P y K, por ejemplo, usando LQR ((A,B) controlable):

$$\delta u = -R^{-1}B^T P\delta x = K\delta x$$

(por ejemplo, con lqr.m de Matlab).
- Este controlador lineal estabiliza localmente al sistema no lineal.

Ejemplo

$\ddot{\theta} = -a\sin(\theta) - b\dot{\theta} - cT$

Objetivo: estabilizar el péndulo en un ángulo $\bar{\theta}$ dado.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -a\sin(x_1+\bar{\theta}) - bx_2 + cT \end{cases}$$

$$x_1 = \theta - \bar{\theta},\ x_2 = \dot{\theta}.$$

Ejemplo

$\ddot{\theta} = -a\sin(\theta) - b\dot{\theta} - cT$

- Para que $(\bar{\theta}, 0)$ sea un equilibrio, debemos aplicar un par constante

$$T_{ss} = \frac{a}{c}\sin(\bar{\theta})$$

- Definamos la acción de control a diseñar como $u = T - T_{ss}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -a\left[\sin(x_1+\bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta})\right] - bx_2 + cu \end{array} \right.$$

- Linealizamos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos(\bar{\theta}) & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} u$$

Ejemplo

$\ddot{\theta} = -a\sin(\theta) - b\dot{\theta} - cT$

- (A, B) controlable:

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & bc \end{bmatrix}$$

- Podemos diseñar una realimentación de estados localmente estabilizante $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$. El control total es:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = T_{ss} + u = \frac{a}{c}\sin(\bar{\theta}) + k_1(\theta - \bar{\theta}) + k_2\dot{\theta}$$

Linealización exacta (Khalil, capítulo 12 (2a Ed.).)

Retomemos el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a\left[\sin(x_1+\bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta})\right] - bx_2 + cu \end{cases}$$

- Re-definamos la acción de control como sigue:

$$u = \frac{a}{c}\left[\sin(x_1+\bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta})\right] + \frac{1}{c}v$$

- La nueva descripción del sistema es lineal y controlable:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

- $u = \frac{a}{c}\left[\sin(x_1+\bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta})\right] + \frac{1}{c}(\tilde{k}_1(\theta-\bar{\theta}) + \tilde{k}_2\dot{\theta})$ estabiliza.

Linealización exacta

¿Cuán general es esta idea de poder cancelar las no linealidades?

- En expresiones como $\alpha(x) + u$, es posible poniendo $u(x) = -\alpha(x) + v$.
- En expresiones como $\beta^{-1}(x)u$, es posible poniendo $u(x) = \beta(x)v$.
- Complexivamente, la forma que debe tener el sistema para poderle cancelar las no linealidades es

$$\dot{x} = Ax + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)]$$

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v \Rightarrow \dot{x} = Ax + Bv$$

- La pareja (A, B) debe ser controlable para que luego todo camine bien!!!

Linealización exacta

Otro ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{x}_1 & = & a\sin(x_2) \\ \dot{x}_2 & = & -x_1^2 + u \end{array} \right.$$

- Es sencillo cancelar la no linealidad x_1^2, pero el término sinusoidal no.
- Sin embargo, si hacemos el siguiente cambio de variable (no lineal):

$$\left\{ \begin{array}{lll} z_1 & = & x_1 \\ z_2 & = & a\sin(x_2) = \dot{x}_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \dot{z}_1 & = & z_2 \\ \dot{z}_2 & = & [a\cos(x_2)]\,.(-x_1^2 + u) \end{array} \right.$$

- La siguiente realimentación linealiza el sistema

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a\cos(x_2)} v \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \dot{z}_1 & = & z_2 \\ \dot{z}_2 & = & v \end{array} \right.$$

en la región donde no se anula el $\cos(x_2)$!!

Linealización exacta

Continuación del ejemplo

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a\cos(x_2)} v$$

- Esta acción de control linealizante está bien definida en $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$.
- El cambio de variable está bien definido y es invertible en $-a < z_2 < a$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & z_1 \\ x_2 & = & \sin^{-1}\left(\frac{z_2}{a}\right) \end{array} \right.$$

- El cambio de variable es invertible y diferenciable (difeomorfismo).

Linealización exacta

Cambio de variable

- Dado el sistema afín $\dot{x} = f(x) + g(x).u$. Consideremos el cambio de variable $z = T(x)$.
- La nueva descripción del sistema es

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x}[f(x) + g(x).u)] \overset{(x=T^{-1}(z))}{=} \tilde{f}(z) + \tilde{g}(z).u$$

- De los muchos cambios de variable que podemos buscar, apuntamos a aquellos que nos lleven a una forma particular, lineal en los estados.
- Queremos que la nueva descripción lineal sea controlable.

Linealización entrada-estado

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$

- En la línea anterior, buscamos un cambio de coordenadas $z = T(x)$, $T(0) = 0$, T invertible en un entorno del origen, tal que en las nuevas coordenadas, la representación tome la siguiente forma:

$$\dot{z} = A_c z + b_c \frac{1}{\beta(x)} \left[u - \alpha(x)\right]$$

(para simplificar la presentación, planteamos todo con una entrada-una salida)

- A_c, b_c las elegimos canónicas (y controlables):

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Linealización entrada-estado

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$

- El sistema resultante es una cadena de integradores:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dot{z}_1 & = & z_2 \\ \dot{z}_2 & = & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{z}_{n-1} & = & z_n \\ \dot{z}_n & = & \frac{[u-\alpha(x)]}{\beta(x)} \end{array}\right. \overset{u(x)=\alpha(x)+\beta(x)v}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccc} \dot{z}_1 & = & z_2 \\ \dot{z}_2 & = & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{z}_{n-1} & = & z_n \\ \dot{z}_n & = & v \end{array}\right.$$

Linealización entrada-estado

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 & = & z_2 \\ \dot{z}_2 & = & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{z}_{n-1} & = & z_n \\ \dot{z}_n & = & v \end{cases}$$

- La dinámica de los estados surge de integrar la entrada.
- Podemos diseñar una realimentación de estados $v(z) = Kz$ que estabilice.
- Esto resulta en un controlador no lineal de la forma

$$\boxed{u(x) = \alpha(x) + \beta(x)KT(x)}$$

El cambio de variable

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$

Si escribimos $T(x) = [T_1(x), T_2(x), \cdots, T_n(x)]^T$, se debe cumplir:

- $T_{i+1}(x) = \frac{\partial T_i}{\partial x}.f(x)$ y $\frac{\partial T_i}{\partial x}.g(x) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$ (cada estado se deriva en el siguiente)
- $\frac{\partial T_n}{\partial x}.f(x) = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ y $\frac{\partial T_n}{\partial x}.g(x) = \frac{1}{\beta(x)} \neq 0$ (la última derivada).

Ejemplo (Khalil 12.2)

Generador síncrono conectado a un bus infinito:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin(\delta)] - bx_2 \\ -cx_3 + d[\cos(x_1+\delta) - \cos(\delta)] \end{bmatrix} \quad , \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con a, b, c, d y δ constantes positivas.

Ejemplo (Khalil 12.2)

Realimentación linealizante

Buscamos $T(x)$, con $T(0) = 0$, que verifique

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = 0 \quad , \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) = 0 \quad , \quad \frac{\partial T_3}{\partial x} g(x) \neq 0$$

con

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) \quad , \quad T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x)$$

Ejemplo (Khalil 12.2)

Realimentación linealizante

De la condición $\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = 0$ obtenemos

$$0 = \frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = \left[\frac{\partial T_1}{\partial x_1}, \frac{\partial T_1}{\partial x_2}, \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial T_1}{\partial x_3}$$

Por lo que tenemos que elegir T_1 independiente de x_3.

Ejemplo (Khalil 12.2)

Realimentación linealizante

Entonces, $T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x)$ tiene la forma

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} .x_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \left(+a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin(\delta)] + bx_2\right)$$

que además debe verificar $\frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) = 0$. Entonces

$$0 = \frac{\partial T_2}{\partial x_3} = -a\sin(x_1+\delta)\frac{\partial T_1}{\partial x_2}$$

Tomamos $T_1(x)$ independiente de x_2. Por lo que $T_2(x)$ toma la forma

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} .x_2$$

y no depende de x_3.

Ejemplo (Khalil 12.2)

Realimentación linealizante

Ahora $T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x)$ toma la forma

$$T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x_1}.x_2 - \frac{\partial T_2}{\partial x_2}\left(a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin(\delta)] + bx_2\right)$$

y debe cumplir

$$\frac{\partial T_3}{\partial x}.g(x) = \frac{\partial T_3}{\partial x_3} = -a\sin(x_1+\delta)\frac{\partial T_2}{\partial x_2} \neq 0$$

Definamos $z = T(x)$ así:

$$\begin{array}{rcccl} z_1 & = & T_1(x) & = & x_1 \\ z_2 & = & T_2(x) & = & x_2 \\ z_3 & = & T_3(x) & = & -a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin(\delta)] - bx_2 \end{array}$$

Ejemplo (Khalil 12.2)

Realimentación linealizante

Verifica $0 = T(0)$ y es localmente invertible

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= z_2 \\ x_3 &= -1 - \tfrac{z_3 + b z_2 - a\sin(\delta)}{a\sin(z_1+\delta)} \end{aligned}$$

Las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ valen

$$\beta(x) = \frac{1}{\frac{\partial T_3}{\partial x}.g(x)} = \frac{-1}{a\sin(x_1 + \delta)}$$

$$\alpha(x) = -\frac{\frac{\partial T_3}{\partial x}.f(x)}{\frac{\partial T_3}{\partial x}.g(x)} = \ldots largo$$

Ejemplo (Khalil 12.2)

Sistema linealizado

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2\\ \dot{z}_2 &= z_3\\ \dot{z}_3 &= -a\sin(x_1+\delta)[u-\alpha(x)]\end{aligned}$$

Redefinimos la entrada $u(x) = \alpha(x) - \frac{1}{a\sin(x_1+\delta)}v$ y podemos diseñar v como una realimentación lineal de los estados z $(v = -Kz)$, que genera una realimentación no lineal de los estados x.

Ejemplo: Motor de continua (Khalil 12.4)

$\dot{x} = f(x) + g(x).u$

El estado consiste en la corriente de campo (x_1), la corriente de armadura (x_2) y la velocidad angular (x_3).

$$f(x) = \begin{bmatrix} -ax_1 \\ -bx_2 + \rho - cx_1x_3 \\ \theta x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema tiene un punto de equilibrio en $x_1 = 0$, $x_2 = \rho/b$ $(u = 0)$. Definamos el punto de operación deseado $x^\star = (0, \rho/b, \omega_0)^T$, donde ω_0 es la velocidad angular deseada.

Ejemplo: Motor de continua (Khalil 12.4)

Realimentación linealizante

Buscamos $T(x)$, con $T(x^\star) = 0$, que verifique

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = 0 \quad , \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) = 0 \quad , \quad \frac{\partial T_3}{\partial x} g(x) \neq 0$$

con

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) \quad , \quad T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x)$$

Ejemplo: Motor de continua (Khalil 12.4)

Realimentación linealizante

De

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} = 0$$

obtenemos que $T_1(x)$ no depende de x_1. Entonces

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_2}[-b x_2 \rho - c x_1 x_3] + \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \theta x_1 x_2$$

De $\frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} = 0$ sale:

$$c x_3 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = \theta x_2 \frac{\partial T_1}{\partial x_3}$$

Ejemplo: Motor de continua (Khalil 12.4)

Realimentación linealizante

Proponemos

$$T_1(x) = [\theta x_2^2 c x_3^2] + c_2$$

con c_2 de forma de satisfacer $T_1(x^\star) = 0$.

$$c_2 = -\theta \left(\frac{\rho}{b}\right)^2 - c\omega_0^2$$

De las condiciones necesarias, sale

$$T_2(x) = 2\theta x_2(\rho - bx_2) \ , \ T_3(x) = 2\theta(\rho - bx_2)(-bx_2 + \rho - cx_1x_3)$$

Ejemplo: Motor de continua (Khalil 12.4)

Realimentación linealizante

Obtenemos un cambio de variable que funciona bien en el dominio

$$D_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > \frac{\rho}{2b} \;\text{ y }\; x_3 > 0 \right\}$$

con inversa bien definida en

$$D_x = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 > \theta \Phi^2(z_2) - \theta \left(\frac{\rho}{b} \right)^2 - c\omega_0^2 \;\text{ y }\; z_2 < \frac{\theta \rho^2}{2b} \right\}$$

con Φ la inversa de $2\theta x_2(\rho - b x_2)$, bien definida para $x_2 > \rho/2b$.

Linealización entrada-salida

$\dot{x} = f(x) + g(x).u$, $y = h(x)$

- Hasta ahora no hemos considerado la salida.
- Normalmente la salida será una función no necesariamente lineal de los estados $y = h(x)$.
- El cambio de variable que linealiza los estados, da como salida $y = h\left[T^{-1}(z)\right]$
- Si tuviéramos una salida lineal en z, podríamos construir fácilmente controladores y observadores.
- Es claro que el cambio de variables debe satisfacer más condiciones que las que vimos hasta ahora.

Linealización entrada-salida

$\dot{x} = f(x) + g(x).u$, $y = h(x)$

- Apuntamos a la forma canónica controlable y observable:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_c = [1, 0, 0, \dots, 0]$$

- Entonces, se debe cumplir que $T_1(x) = h(x)$.
- La función de salida h debe cumplir con las ecuaciones en derivadas parciales que vimos antes!!!
- Distintas elecciones de h pueden llevarnos a distintas situaciones.

Linealización entrada-salida

$\dot{x} = f(x) + g(x).u$, $y = h(x)$

- No siempre es posible satisfacer las ecuaciones en derivadas parciales anteriores.
- Existen condiciones necesarias y suficientes, provenientes del Teorema de Frobenius, del contexto de Geometría Diferencial.

Grado relativo

Esencialmente es el número de veces que hay que derivar la salida para que la entrada aparezca en forma explícita.
Obviamente depende de h, pero también puede depender de x!!

Ejemplo (Van der Pol)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u \end{array} \right.$$

Para la salida $y = x_1$, el grado relativo es 2, pues

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \quad , \quad \ddot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

Si elegimos $y = x_2$, entonces el grado relativo es 1.

Ejemplo: Motor de continua

Retomemos el ejemplo de motor DC

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + \rho - cx_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= \theta x_1 x_2 \end{aligned}$$

Calculemos el grado relativo

para la salida $y = x_3$ (velocidad)

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_3 &&= \theta x_1 x_2 \\ \ddot{y} &= \theta \dot{x}_1 x_2 + \theta x_2 \dot{x}_2 &&= (\ldots) + \theta x_2 u \end{aligned}$$

El grado relativo para esta salida es 2 (en la región $x_2 \neq 0$)..

Grado relativo

- El nombre proviene del hecho de que para sistemas lineales SISO, este concepto coincide con la diferencia entre el grado del denominador y el grado del numerador de la transferencia (ver Khalil).
- Consideremos un sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$, con $y = Cx + Du$.
- Si $D \neq 0$, entonces el grado relativo es 0.
- Supongamos $D = 0$. Entonces

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu$$

  Si $CB \neq 0$, el grado relativo es 1.
- Supongamos $CB = 0$. Entonces

$$\ddot{y} = C\dot{y} = CA(Ax + Bu) = CA^2x + CABu$$

  Si $CAB \neq 0$, el grado relativo es 2.

Grado relativo

Supongamos $CA^{i-2}B = 0$. Entonces

$$\frac{d^i y}{dt^i} = CA^i x + CA^{i-1} B u$$

Si $CA^{i-1}B \neq 0$, el grado relativo es i.

Grado relativo

- Sea $x = Uz$ un cambio de base para el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx + Du \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \dot{z} & = & U^{-1}AU + U^{-1}Bu \\ y & = & CUz + Du \end{array}\right.$$

- Entonces

$$(CU)(U^{-1}AU)^{i-1}(U^{-1}B) = (CU)U^{-1}(A^{i-1})U(U^{-1}B) = CA^{i-1}B$$

- El grado relativo es un invariante!!

Grado relativo

- Consideremos la transferencia

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- Si n mayor que m, podemos escribirla como

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

Grado relativo

Admite la siguiente realización en variables de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & & -a_n \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que $CA^iB = 0$ para $i < (n - m)$ (verificarlo!!).

El grado relativo es el exceso cero-polo.

Grado relativo

- Este parámetro determina la posibilidad de encontrar un cambio de coordenadas *linealizante*.
- Tenemos dos posibilidades:
  - Linealización entrada-estado ($r = n$)
  - Linealización entrada-salida ($r < n$)

Linealización exacta

Linealización entrada-estado

Cuando el grado relativo es máximo (n), entonces existe un cambio de coordenadas $z = T(x)$, con $z_1 = T_1(x) = h(x)$, tal que:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dot{z}_1 & = & z_2 \\ \dot{z}_2 & = & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{z}_{n-1} & = & z_n \\ \dot{z}_n & = & v \\ \\ y & = & z_1 \end{array}\right.$$

Como ya vimos, a partir de esta descripción del sistema, diseñamos una realimentación estabilizante (lineal en z, no lineal en x).

Linealización exacta

Linealización entrada-salida

Cuando el grado relativo es $r < n$, entonces lo más a lo que podemos aspirar es a lo siguiente:

- A partir de h, comenzamos a construir un cambio de variable.
- Sólo vamos a llegar a $h(x) = T_1(x), T_2(x), \ldots, T_r(x)$.
- Completamos ese cambio de variable con $n - r$ funciones más, elegidas apropiadamente, que nos lleva a:

$$z = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} T_\eta(x) \\ T_\zeta(x) \end{bmatrix}$$

con $\zeta \in \mathcal{R}^r$, tal que:

$$\begin{cases} \dot{\eta} & = & f_0(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} & = & A_r\zeta + B_r\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] = A_r\zeta + B_r v \end{cases}$$

Linealización exacta

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} &= A_r\zeta + B_r\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] = A_r\zeta + B_r v \end{cases}$$

Diseño del controlador para $r < n$

- Podemos diseñar el control lineal $v = K\zeta$, que se traduce en

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)KT_\zeta(x)$$

- Este controlador lleva $\zeta \to 0$, es decir, controla sólo una parte del estado.

Linealización exacta

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} &= A_r\zeta + B_r\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] = A_r\zeta + B_r v \end{cases}$$

Diseño del controlador para $r < n$

- El resto de la dinámica depende del comportamiento del siguiente sistema reducido:
$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$
denominado dinámica de los ceros.
- El nombre proviene del hecho de que si el sistema es lineal y SISO, los autovalores de la dinámica de los ceros corresponden a los ceros de la transferencia del sistema.
- Para que lo anterior camine bien, $\eta = 0$ debe ser un atractor de la dinámica de los ceros (fase mínima).

Linealización exacta

Dinámica de los ceros

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

- Puede caracterizarse en términos de x.
- Observemos que si imponemos $y(t) = \zeta_1(t) = 0$ para todo t, entonces $\zeta(t) = 0$ para todo t, lo que implica $u(t) = \alpha(t)$ para todo t.
- Entonces, la dinámica de los ceros está confinada a moverse en el conjunto:

$$\mathbb{Z}^\star = \{x \mid \zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = \zeta_r = 0\}$$
$$= \{x \mid T_1(x) = T_2(x) = \ldots = T_r(x) = 0\}$$

con $u^\star(x) = \alpha(x)|_{x \in \mathbb{Z}^\star}$

Ejemplo

Motor DC

Para este sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + u\\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + \rho - cx_1x_3\\ \dot{x}_3 &= \theta x_1 x_2\\ \\ y &= x_3\end{aligned}$$

ya sabemos que tiene grado relativo 2 (para $x_2 \neq 0$)

Ejemplo

Motor DC

- Consideremos el cambio de variable

$$\zeta_1 = \Psi_1(x) = x_3 \quad , \quad \zeta_2 = \Psi_2(x) = \dot{x}_3 = \theta x_1 x_2$$

del que obtenemos

$$\beta(x) = \frac{1}{\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}.g(x)} = \frac{1}{\theta x_2}$$

$$\alpha(x) = \frac{\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}.f(x)}{\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}.g(x)} = \frac{-a\theta x_1 x_2 \theta x_1(-bx_2 + \rho - cx_1 x_3)}{\theta x_2}$$

- Notar que debe ser $x_2 \neq 0$.

Ejemplo

Motor DC

- La nueva descripción del sistema es

$$\begin{cases} \dot{\eta} & = & f_0(\eta, \zeta) \\ \\ \dot{\zeta}_1 & = & \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 & = & v \end{cases}$$

Ejemplo

Motor DC

- Para ver la dinámica de los ceros, consideramos

$$\mathbb{Z}^\star = \{\zeta_1 = \zeta_2 = 0\} = \{x | x_3 = 0\,,\, x_1 x_2 = 0\} = \{x | x_3 = 0\,,\, x_1 = 0\}$$

 pues $x_2 \neq 0$ en el dominio de trabajo.

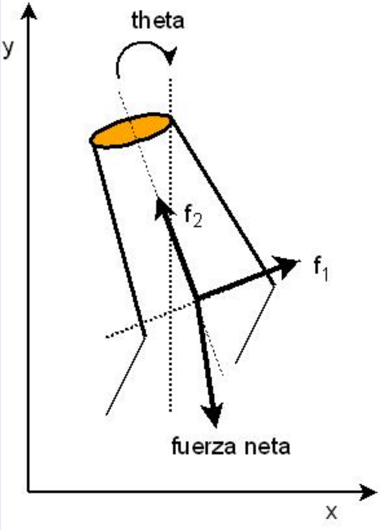
- La entrada $u^\star(x) = \alpha(x)|_{x \in \mathbb{Z}^\star}$ es nula, por lo que obtenemos: $\dot{x}_2 = -bx_2 + \rho$, que tiene un atractor asintótico en $\frac{\rho}{b}$.
- El difeomorfismo lo completamos con $T_\eta(x) = x_2 - \frac{\rho}{b}$, que verifica

$$\frac{\partial T_\eta}{\partial x}.g(x) = 0$$

 y transforma el atractor de la dinámica de los ceros en el origen de las nuevas coordenadas.

Ejemplo

Ejemplo: modelo planar de un avión



Linealización exacta

Ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} m\ddot{x} & = & f_1\cos(\theta) - f_2\sin(\theta) - d\dot{x} \\ m\ddot{y} & = & -mg + f_1\sin(\theta) + f_2\cos(\theta) - d\dot{y} \\ J\ddot{\theta} & = & -mgl\sin(\theta) + r\,f_1 \end{array}\right.$$

El modelo tiene dos entradas. En este caso el grado relativo es un vector.

Linealización exacta

Realimentación linealizante

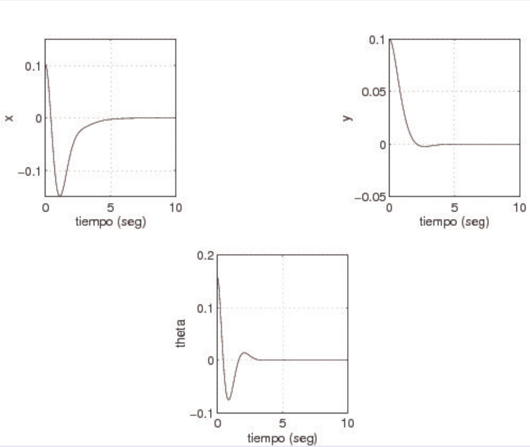
- Tomando como salidas y y θ, no es completamente linealizable.
- El sistema puede ser llevado a la forma normal:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\dot{z}_1 & = & z_2 \\
\dot{z}_2 & = & u_1 \\
\dot{z}_3 & = & z_4 \\
\dot{z}_4 & = & u_2 \\
\hline
\dot{z}_5 & = & z_6 - z_2 \tan(z_3) + J\frac{z_4}{mr\cos(z_3)} \\
\dot{z}_6 & = & -\frac{d}{m} z_6 + Jd\frac{z_4}{m^2 r\cos(z_3)} + z_2 z_4 + \\
 & & \tan(z_3)\left[g\left(\frac{l}{r} - 1\right) + z_2 z_4 \tan(z_3) - J\frac{z_4^2}{mr\cos(z_3)}\right]
\end{array}\right.$$

- La dinámica de los ceros resulta ser estable, por lo que podemos diseñar un controlador lineal que asegure la convergencia de todos los estados al origen.

Linealización exacta

Resultados



Robustez

Cancelación exacta de no linealidades

- La realimentación linealizante cancela las no linealidades presentes en el sistema, dando lugar a un controlador no lineal.
- Como el sistema está sujeto a incertidumbre, tanto por desconocimiento parcial de parámetros y dinámica como por perturbaciones que puedan haber, es optimista pensar en una cancelación exacta.
- Podemos preguntarnos cómo funcionará un controlador linealizante frente a incertidumbre.

Robustez

Análisis de robustez

- Supongamos que tenemos un sistema linealizable entrada-estado y

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] \quad z = T(x)$$

- Y que diseñamos una realimentación estabilizante

$$u(x) = \hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x), \quad \hat{T}(x) \text{ nominal}$$

  donde los $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{T}$ son expresiones nominales.
- En lazo cerrado, obtenemos

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)\left[\hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x) - \alpha(x)\right]$$

Robustez

Análisis de robustez

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)\left[\hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x) - \alpha(x)\right]$$

- Sumamos y restamos $BKz = BKT(x)$:

$$\dot{z} = (A + BK)z + B\delta(z)$$

con

$$\begin{aligned}\delta(z) \quad = \quad & \beta^{-1}(x)\{\hat{\alpha}(x) - \alpha(x) + [\hat{\beta}(x) - \beta(x)]KT(x) + \\ & \hat{\beta}(x)K[\hat{T}(x) - T(x)]\}\Big|_{x=T^{-1}(z)}\end{aligned}$$

Robustez

Análisis de robustez

- El sistema resulta ser la perturbación del sistema lineal

$$\dot{z} = (A + BK)z$$

  con $(A + BK)$ Hurwitz.
- Podemos aplicar lo que vimos de perturbación de sistemas globalmente asintóticamente estables y quedarnos tranquilos de que los errores no tendrán efectos graves si δ *no es muy mala*.
- Por ejemplo, si $\delta(0) = 0$, el sistema real será globalmente asintóticamente estable si la ganancia de δ no es muy grande.

Ejemplo

Mostrar que el sistema es linealizable entrada-estado (a y b positivos).

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 & = & bx_1 - x_2 - x_1 x_3 + u \\ \dot{x}_3 & = & x_1 + x_1 x_2 - 2a x_3 \end{array} \right.$$