





















## Linealización exacta

### Otro ejemplo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u \end{cases}$$

- Es sencillo cancelar la no linealidad  $x_1^2$ , pero el término sinusoidal no.
- Sin embargo, si hacemos el siguiente cambio de variable (no lineal):

$$\begin{cases} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= a \sin(x_2) = \dot{x}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= [a \cos(x_2)] \cdot (-x_1^2 + u) \end{cases}$$

- La siguiente realimentación linealiza el sistema

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos(x_2)} v \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \end{cases}$$

en la región donde no se anula el  $\cos(x_2)$ !!















## Ejemplo (Khalil 12.2)

### Realimentación linealizante

Buscamos  $T(x)$ , con  $T(0) = 0$ , que verifique

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = 0 \quad , \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) = 0 \quad , \quad \frac{\partial T_3}{\partial x} g(x) \neq 0$$

con

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) \quad , \quad T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x)$$































## Grado relativo

- El nombre proviene del hecho de que para sistemas lineales SISO, este concepto coincide con la diferencia entre el grado del denominador y el grado del numerador de la transferencia (ver Khalil).
- Consideremos un sistema lineal  $\dot{x} = Ax + Bu$ , con  $y = Cx + Du$ .
- Si  $D \neq 0$ , entonces el grado relativo es 0.
- Supongamos  $D = 0$ . Entonces

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu$$

Si  $CB \neq 0$ , el grado relativo es 1.

- Supongamos  $CB = 0$ . Entonces

$$\ddot{y} = C\dot{y} = CA(Ax + Bu) = CA^2x + CABu$$

Si  $CAB \neq 0$ , el grado relativo es 2.

## Grado relativo

Supongamos  $CA^{i-2}B = 0$ . Entonces

$$\frac{d^i y}{dt^i} = CA^i x + CA^{i-1} B u$$

Si  $CA^{i-1}B \neq 0$ , el grado relativo es  $i$ .

## Grado relativo

- Sea  $x = Uz$  un cambio de base para el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z} = U^{-1}AU + U^{-1}Bu \\ y = CUz + Du \end{cases}$$

- Entonces

$$(CU)(U^{-1}AU)^{i-1}(U^{-1}B) = (CU)U^{-1}(A^{i-1})U(U^{-1}B) = CA^{i-1}B$$

- El grado relativo es un invariante!!

## Grado relativo

- Consideremos la transferencia

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Si  $n$  mayor que  $m$ , podemos escribirla como

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

## Grado relativo

Admite la siguiente realización en variables de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & & -a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [ b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0 ]$$

Por lo que  $CA^iB = 0$  para  $i < (n - m)$  (verificarlo!!).

El grado relativo es el exceso cero-polo.

## Grado relativo

- Este parámetro determina la posibilidad de encontrar un cambio de coordenadas *linealizante*.
- Tenemos dos posibilidades:
  - Linealización entrada-estado ( $r = n$ )
  - Linealización entrada-salida ( $r < n$ )

## Linealización exacta

### Linealización entrada-estado

Cuando el grado relativo es máximo ( $n$ ), entonces existe un cambio de coordenadas  $z = T(x)$ , con  $z_1 = T_1(x) = h(x)$ , tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = v \\ y = z_1 \end{array} \right.$$

Como ya vimos, a partir de esta descripción del sistema, diseñamos una realimentación estabilizante (lineal en  $z$ , no lineal en  $x$ ).

## Linealización exacta

### Linealización entrada-salida

Cuando el grado relativo es  $r < n$ , entonces lo más a lo que podemos aspirar es a lo siguiente:

- A partir de  $h$ , comenzamos a construir un cambio de variable.
- Sólo vamos a llegar a  $h(x) = T_1(x), T_2(x), \dots, T_r(x)$ .
- Completamos ese cambio de variable con  $n - r$  funciones más, elegidas apropiadamente, que nos lleva a:

$$z = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} T_\eta(x) \\ T_\zeta(x) \end{bmatrix}$$

con  $\zeta \in \mathcal{R}^r$ , tal que:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} = A_r \zeta + B_r \beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] = A_r \zeta + B_r v \end{cases}$$

## Linealización exacta

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} &= A_r \zeta + B_r \beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] = A_r \zeta + B_r v \end{cases}$$

### Diseño del controlador para $r < n$

- Podemos diseñar el control lineal  $v = K\zeta$ , que se traduce en

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)KT_\zeta(x)$$

- Este controlador lleva  $\zeta \rightarrow 0$ , es decir, controla sólo una parte del estado.

## Linealización exacta

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} = A_r \zeta + B_r \beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] = A_r \zeta + B_r v \end{cases}$$

### Diseño del controlador para $r < n$

- El resto de la dinámica depende del comportamiento del siguiente sistema reducido:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

denominado **dinámica de los ceros**.

- El nombre proviene del hecho de que si el sistema es lineal y SISO, los autovalores de la dinámica de los ceros corresponden a los ceros de la transferencia del sistema.
- Para que lo anterior camine bien,  $\eta = 0$  debe ser un atractor de la dinámica de los ceros (**fase mínima**).

## Linealización exacta

### Dinámica de los ceros

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

- Puede caracterizarse en términos de  $x$ .
- Observemos que si imponemos  $y(t) = \zeta_1(t) = 0$  para todo  $t$ , entonces  $\zeta(t) = 0$  para todo  $t$ , lo que implica  $u(t) = \alpha(t)$  para todo  $t$ .
- Entonces, la dinámica de los ceros está confinada a moverse en el conjunto:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^* &= \{x \mid \zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_r = 0\} \\ &= \{x \mid T_1(x) = T_2(x) = \dots = T_r(x) = 0\} \end{aligned}$$

con  $u^*(x) = \alpha(x)|_{x \in \mathbb{Z}^*}$

## Ejemplo

### Motor DC

Para este sistema

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + \rho - cx_1x_3$$

$$\dot{x}_3 = \theta x_1x_2$$

$$y = x_3$$

ya sabemos que tiene grado relativo 2 (para  $x_2 \neq 0$ )

## Ejemplo

### Motor DC

- Consideremos el cambio de variable

$$\zeta_1 = \Psi_1(x) = x_3 \quad , \quad \zeta_2 = \Psi_2(x) = \dot{x}_3 = \theta x_1 x_2$$

del que obtenemos

$$\beta(x) = \frac{1}{\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \cdot g(x)} = \frac{1}{\theta x_2}$$

$$\alpha(x) = \frac{\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \cdot f(x)}{\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \cdot g(x)} = \frac{-a\theta x_1 x_2 \theta x_1 (-bx_2 + \rho - cx_1 x_3)}{\theta x_2}$$

- Notar que debe ser  $x_2 \neq 0$ .

## Ejemplo

### Motor DC

- La nueva descripción del sistema es

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 &= v \end{cases}$$

## Ejemplo

### Motor DC

- Para ver la dinámica de los ceros, consideramos

$$\mathbb{Z}^* = \{\zeta_1 = \zeta_2 = 0\} = \{x | x_3 = 0, x_1 x_2 = 0\} = \{x | x_3 = 0, x_1 = 0\}$$

pues  $x_2 \neq 0$  en el dominio de trabajo.

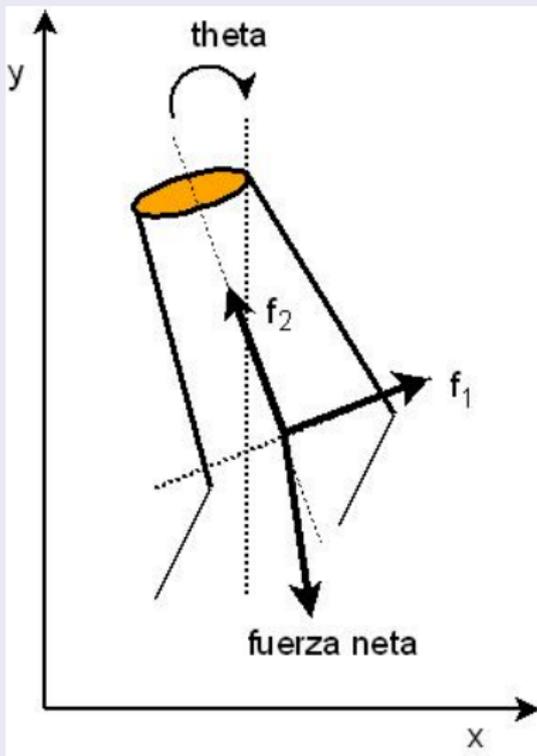
- La entrada  $u^*(x) = \alpha(x)|_{x \in \mathbb{Z}^*}$  es nula, por lo que obtenemos:  
 $\dot{x}_2 = -bx_2 + \rho$ , que tiene un atractor asintótico en  $\frac{\rho}{b}$ .
- El difeomorfismo lo completamos con  $T_\eta(x) = x_2 - \frac{\rho}{b}$ , que verifica

$$\frac{\partial T_\eta}{\partial x} \cdot g(x) = 0$$

y transforma el atractor de la dinámica de los ceros en el origen de las nuevas coordenadas.

# Ejemplo

## Ejemplo: modelo planar de un avión



## Linealización exacta

### Ecuaciones

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= f_1 \cos(\theta) - f_2 \sin(\theta) - d\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -mg + f_1 \sin(\theta) + f_2 \cos(\theta) - d\dot{y} \\ J\ddot{\theta} &= -mgl \sin(\theta) + rf_1 \end{cases}$$

El modelo tiene dos entradas. En este caso el grado relativo es un vector.

## Linealización exacta

### Realimentación linealizante

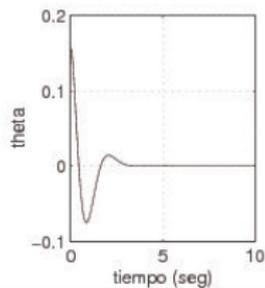
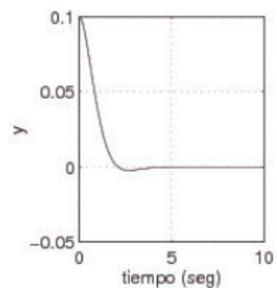
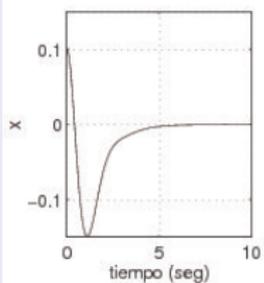
- Tomando como salidas  $y$  y  $\theta$ , no es completamente linealizable.
- El sistema puede ser llevado a la **forma normal**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = u_1 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = u_2 \\ \hline \dot{z}_5 = z_6 - z_2 \tan(z_3) + J \frac{z_4}{mr \cos(z_3)} \\ \dot{z}_6 = -\frac{d}{m} z_6 + J d \frac{z_4}{m^2 r \cos(z_3)} + z_2 z_4 + \\ \quad \tan(z_3) \left[ g \left( \frac{l}{r} - 1 \right) + z_2 z_4 \tan(z_3) - J \frac{z_4^2}{mr \cos(z_3)} \right] \end{array} \right.$$

- La dinámica de los ceros resulta ser estable, por lo que podemos diseñar un controlador lineal que asegure la convergencia de todos los estados al origen.

# Linealización exacta

## Resultados



## Cancelación exacta de no linealidades

- La realimentación linealizante cancela las no linealidades presentes en el sistema, dando lugar a un controlador no lineal.
- Como el sistema está sujeto a incertidumbre, tanto por desconocimiento parcial de parámetros y dinámica como por perturbaciones que puedan haber, es optimista pensar en una cancelación exacta.
- Podemos preguntarnos cómo funcionará un controlador linealizante frente a incertidumbre.

# Robustez

## Análisis de robustez

- Supongamos que tenemos un sistema linealizable entrada-estado y

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] \quad z = T(x)$$

- Y que diseñamos una realimentación estabilizante

$$u(x) = \hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x), \quad \hat{T}(x) \text{ nominal}$$

donde los  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  y  $\hat{T}$  son expresiones nominales.

- En lazo cerrado, obtenemos

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x) \left[ \hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x) - \alpha(x) \right]$$



