Wavelets

Análisis Tiempo–Frecuencia

IIE

[1]Facultad de Ingeniería Universidad de la República

September 20, 2021

Contenido

Recordando Sparse Coding

Otra opción es minimzar la cantidad de elementos no nulos de α

$$D\alpha = x$$

Se logra poniendo en el costo el peso de la norma cero de α, que corresponde a una solución esparsa.

- Se puede interpretar como una interpolación local de átomos interpretables como partes o representates de x
- Logra representaciones que corresponden a formas muy eficientes de codificar la solución (muy comprimidas).
- Es robusto al ruido.
- El diccionario D no tiene por qué ser conocido.
- Es un problema no convexo NP–completo

Espectrograma Reasignado

Basado en la distribución Wigner, realiza dos tareas:

- Suaviza
- Acerca los espúreos al centro de masa

En términos del espectrograma (Wigner ya suavizado)

$$\tilde{S}_x^h(t,\omega) = \iint S_x^h(s,\eta)\delta(t - \hat{t}_x(s,\eta), \omega - \hat{\omega}_x(s,\eta))dsd\eta$$

donde

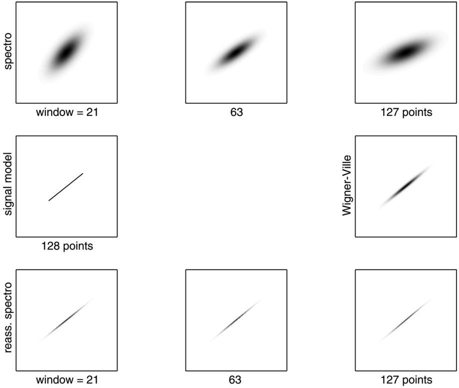
$$\hat{t}_x(s,\eta) = -\partial_\omega \varphi(t,\omega)$$

$$\hat{\omega}_x(s,\eta) = \omega + \partial_t \varphi(t,\omega)$$

Espectrograma Reasignado

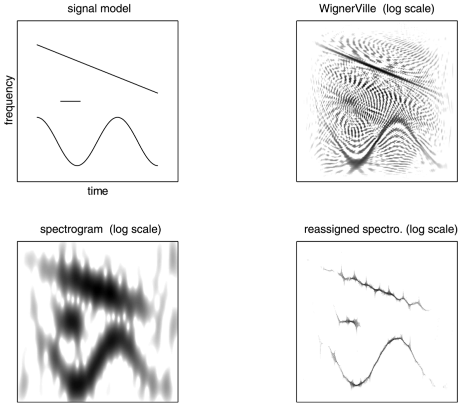
Interpretación: reasigna la energía al candidato más probable, obteniendo una representación de más alto nivel, rala, que se codifica con poca información.

Ejemplo: Chirp



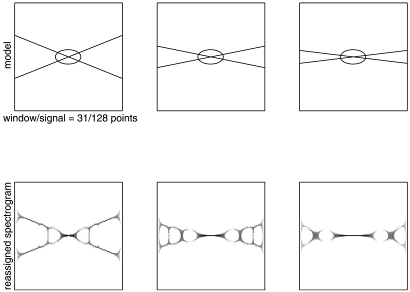
Espectrograma Reasignado

Decisión relativamente local, diferentes versiones, pero todas en alguna medida locales.
Si la decisión de reasigación tiene baja ambigüedad, funciona bien.
Ejemplo: varias fuentes disjuntas.



Espectrograma Reasignado

Decisión relativamente local, diferentes versiones, pero todas en alguna medida locales.
Si la decisión de reasigación tiene alta ambigüedad, y es imposible interpretar un contexto global tomando decisiones locales.
¡Funciona MAL!
Ejemplo: cruce de componentes en el plano T-F.



Contenido

Entropía de Renyi

El espectrograma es una distribución de energía en el plano tiempo-frecuencia. Podemos calcular su entropía basándonos en la entropía clásica de Shannon:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

Pero, ¿cómo estimarla a partir de la distribución de Wigner? Toma valores negativos....

Entropía de Renyi

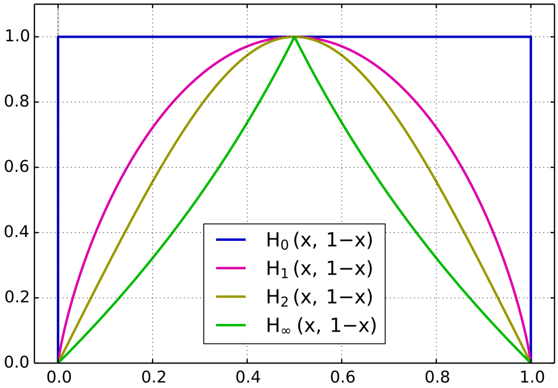
Existe una generalización a la entropía de Shannon, la entropía de Renyi:

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha \right)$$

Permite estimar la entropía con valores negativos, y mantiene la capacidad de medir la aleatoriedad de la distribución.

Entropía de Renyi

Ejemplo de la forma de la entropía de Renyi para distintos α.



Contenido

Wavelets

Propiedades básicas de las wavelets:

- Soporte finito
- Media nula
- Se parametrizan en un espacio de traslación-escala

$$X(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^*_{u,s}(t)dt$$

Similar a representación Tiempo-Frecuencia pero no se impone que ψ esté cercano a la igualdad del ppio de incertidumbre.

Wavelets

Diseño o elección de una Wavelet:

- Vanishing moments
- Regularidad
- Selectividad en frecuencia

$$X(u,s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^*_{u,s}(t)dt$$

Wavelets - Vanishing moments

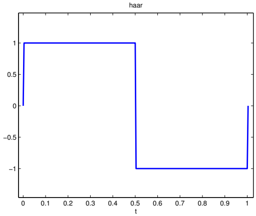
El momento k:

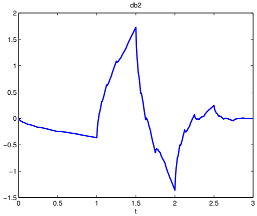
$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^k dk$$

desaparece si su integral es cero.
Cuantos más momentos se anulan, más compleja es la wavelet. Es más aropiada para representar señales complejas.
Desventajas:
El soporte debe ser más grande. Si tiene p momentos, pierde la capacidad de representar polinomios de grado menor.

Wavelets - Regularidad

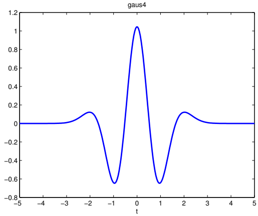
Cuantos más momentos se anulan, más regularidad, corresponde a una representación más suave. Usualmente un mejor compromiso tiempo-frecuencia, es decir más cerca del principio de incertidumbre:
Ejemplo baja regularidad: Haar, Db2





Wavelets - Regularidad

Cuantos más momentos se anulan, más regularidad, corresponde a una representación más suave. Usualmente un mejor compromiso tiempo-frecuencia, es decir más cerca del principio de incertidumbre:
Ejemplo alta regularidad: Gabor (gaussiana).



Wavelets diádicas invariantes a traslaciones

La forma general de la función madre es:

$$\psi_{u,s} = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

Si se elige una discretización de la escala en forma exponencial, por ejemplo en base 2:

$$D = \left\{\psi_{u,2^j} = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi\left(\frac{t-u}{2^j}\right)\right\}$$

La transformada Wavelet diádica es:

$$Wf(u,2^j) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi\left(\frac{t-u}{2^j}\right)dt$$

Se puede calcular simplemente submuestreando la señal por un factor de 2 de manera iterativa.

Diseño de Wavelets diádicas

Sean h y g, respuestas al impulso de soporte finito.
Siendo h un pasabajos con transferencia $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$.
Se puede construir una función de escalado en Fourier:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$$

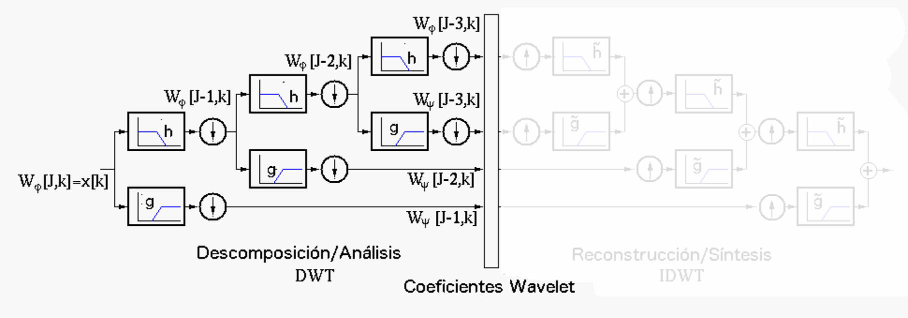
La función madre (kernel) que define la wavelet en Fourier queda definida por:

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$$

Y se puede probar que el soporte de ϕ y ψ son compactos (acotados).
La cantidad de vanishing points es igual a la cantidad de ceros de $\hat{\psi}(\omega)$ en $\omega = 0$ (que coincide con la de g).

Transformada Diádica Rápida

Implementación discreta, eficiente.



Transformada Diádica Rápida - Reconstrucción

¿Cómo es el proceso de reconstrucción? Se calcula con un par de filtros duales con respuestas $\tilde{h}$ y $\tilde{g}$.
Análogamente

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\tilde{h}}(\omega/2)\hat{\tilde{\phi}}(\omega/2)$$

Donde la función de reconstrucción es:

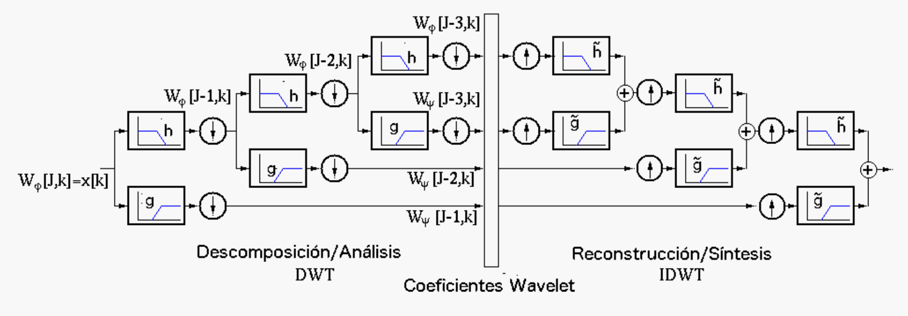
$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\tilde{g}}(\omega/2)\hat{\tilde{\phi}}(\omega/2)$$

Y se puede probar que esto ocurre si:

$$\hat{\tilde{h}}(\omega)\hat{h}^*(\omega) + \hat{\tilde{g}}(\omega)\hat{g}^*(\omega) = 2$$

Transformada Diádica Rápida - Reconstrucción

Implementación discreta, eficiente.



Wavelets clásicas - Haar

Haar

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1/2, \\ -1 & 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

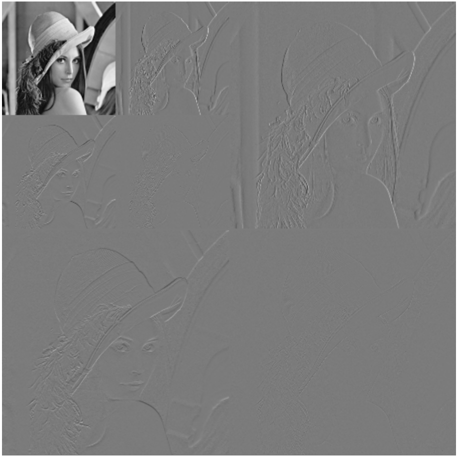
La función de escala es:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Wavelets clásicas - Haar

Haar

Detección, representación de discontinuidades. Ejemplo de aplicación, ubicación de bordes en imágenes.

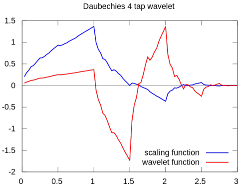


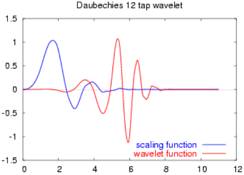
Transformada Diádica Rápida

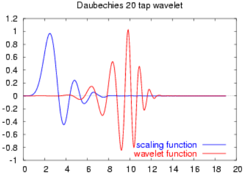
Ejemplo para imágenes. Se obtiene una representación jerárquica de los detalles a diferentes escalas y una representación de la señal a la escala final.
Ejemplo 2-D, 1 paso de Daubechies en la imagen de Lena.

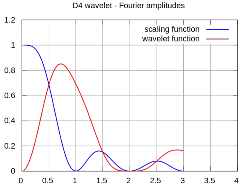
Wavelets clásicas - Daubechies

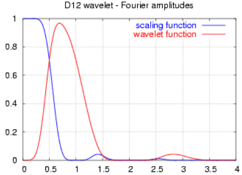
Ejemplo Wavelet eficiente en cantidad.

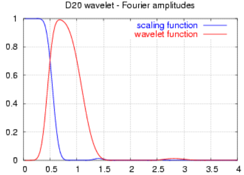












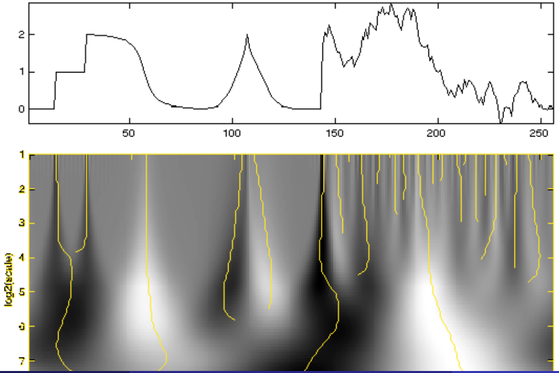
Wavelets clásicas - Modulus Maxima

Modulus Maxima - Detección de singularidades.

$$\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$$

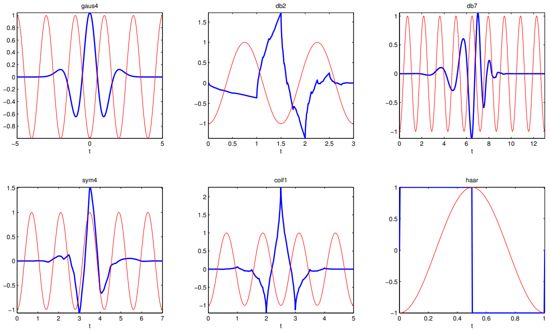
Donde θ es una función con área no nula

Ejemplo para detectar singularidades: derivada de una gaussiana.



Wavelets clásicas - Frecuencia Central

Cada función madre tiene una frecuencia media o frecuencia central asociada a la escala.



Otras Wavelets

Wavelets de Tiempo Discreto

- Beylkin (18)
- BNC wavelets
- Coiflet (6, 12, 18, 24, 30)
- Cohen-Daubechies-Feauveau wavelet (Wavelets biortogonales de Daubechies)
- Daubechies wavelet (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, etc.)
- Binomial-QMF (Also referred to as Daubechies wavelet)
- Haar wavelet
- Mathieu wavelet
- Legendre wavelet
- Villasenor wavelet
- Symlet

Wavelets de Tiempo Continuo

Valores Reales:

- Beta wavelet
- Hermitian wavelet
- Hermitian hat wavelet
- Meyer wavelet
- Mexican hat wavelet
- Poisson wavelet
- Shannon wavelet
- Spline wavelet
- Stromberg wavelet

Wavelets de Tiempo Continuo

Valores complejos:

- Complex Mexican hat wavelet
- fbsp wavelet
- Morlet wavelet
- Shannon wavelet
- Modified Morlet wavelet