Método Simplex Revisado – Soluciones

Ejercicio 1)

Comenzamos por escribir el problema en forma standard, agregando variables de holgura:

$$
\begin{aligned}
&\min -8x_1 - 19x_2 - 7x_3 \\
&s.a. \\
&\quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 25 \\
&\quad x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 50 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Las variables de holgura brindan una solución básica factible inicial: $x_B = (x_4, x_5)$. La matriz básica correspondiente y su inversa están dadas por $B = B^{-1} = I$. Los multiplicadores simplex son $\pi^T = c_B^T B^{-1} = (0,0)$. El lado derecho transformado es $\overline{b} = B^{-1}b = (25,50)^T$. Finalmente, el valor objetivo es $\overline{z} = c_B^T B^{-1} b = 0$.

ITERACIÓN 1

Buscamos una variable no básica con costo reducido negativo, por ejemplo x_2, ya que su costo reducido es

$$\overline{c_2} = -19 - (0,0)(4,3)^T = -19$$

La columna correspondiente a x_2 expresada en la base actual es $\overline{a_2} = B^{-1}a_2 = (4,3)^T$ y el tableau:

4	25	1	0
3	50	0	1
-19	0	0	0

La variable saliente es x_4 y el tableau luego del pivoteo es:

1	25/4	1/4	0
0	125/4	-3/4	1
0	475/4	19/4	0

La base actual es (x_2, x_5) y el valor objetivo es –475/4.

ITERACIÓN 2

La variable x_3 tiene costo reducido $\overline{c_3} = -7 - (-19/4,0)(1,3)^T = -9/4$ y entra a la base.

La columna actualizada es $\overline{a_3} = B^{-1}a_3 = (1/4, 9/4)^T$. El tableau queda:

1/4	25/4	1/4	0
9/4	125/4	-3/4	1
-9/4	475/4	19/4	0

La variable saliente es x_5 y luego de pivotear tenemos:

0	25/9	1/3	-1/9
1	125/9	-1/3	4/9
0	150	4	1

ITERACIÓN 3

En este paso todos los costos reducidos de las variables no básicas son positivos: la solución es óptima.

En consecuencia, la solución óptima del problema es $x_1 = x_4 = x_5 = 0$, $x_2 = 25/9$ y $x_3 = 125/9$. El valor óptimo es –150.

Ejercicio 2)

Comenzamos por escribir el problema en forma no matricial:

$$
\begin{aligned}
&\min\ 3x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 9x_4 + 11x_5 \\
&s.a. \\
&\quad x_1 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\
&\quad x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Para aplicar el método necesitamos una solución básica factible inicial. Las variables x_1 y x_2 proporcionan una base adecuada. Tenemos entonces, $x_B = (x_1, x_2)$. La matriz básica correspondiente (formada por las columnas de las variables básicas) es $B = I$ y su inversa $B^{-1} = I$.

Luego, calculamos los valores inciales de:

Los multiplicadores Simplex: $\pi^T = c_B^T B^{-1} = (3,3)$

El lado derecho transformado: $\overline{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

El valor objetivo: $\overline{z} = c_B^T B^{-1} b = 6$

ITERACION 1

Examinamos los costos reducidos de las variables no básicas, según $\overline{c_i} = c_i - \pi^T a_i$ siendo a_i la columna de la i-ésima variable no básica. Tenemos:

$$
\begin{aligned}
\overline{c_3} &= 12 - (3,3)(2,3)^T = -3 \\
\overline{c_4} &= 9 - (3,3)(3,1)^T = -3 \\
\overline{c_5} &= 11 - (3,3)(2,2)^T = -1
\end{aligned}
$$

Elegimos alguna de las variables con costo reducido negativo para entrar a la base, por ejemplo x_3.

La columna correspondiente a x_3 expresada en la base actual es $\overline{a_3} = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y el tableau:

2	1	1	0
3	1	0	1
-3	-6	-3	-3

La casilla sombreada representa la variable que sale de la base (x_2) y es donde se debe pivotear. El tableau luego del pivoteo es:

0	1/3	1	-2/3
1	1/3	0	1/3
0	-5	-3	-2

Recordemos que el tableau luego del pivoteo tiene la siguiente información:

e	$\overline{b}$	B^{-1}
0	$-z$	$-\pi^{T}$

La solución actual tiene como variables básicas a $x_B = (x_1, x_3)$ y el valor objetivo es 5.

ITERACIÓN 2

Nuevamente examinamos los costos reducidos de las variables no básicas, en busca de los negativos:

$$\overline{c_2} = 3 - (3,2)(0,1)^T = 1$$
$$\overline{c_4} = 9 - (3,2)(3,1)^T = -2$$
$$\overline{c_5} = 11 - (3,2)(2,2)^T = 1$$

Elegimos a x_4 para entrar a la base.

Calculamos la columna correspondiente en términos de la base actual: $\overline{a_4} = B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

El tableau correspondiente es:

7/3	1/3	1	-2/3
1/3	1/3	0	1/3
-2	-5	-3	-2

La variable saliente es x_1 y obtenemos el nuevo tableau pivoteando en la casilla sombreada:

1	1/7	3/7	-2/7
0	2/7	-1/7	3/7
0	-33/7	-15/7	-18/7

La solución actual tiene como variables básicas a $x_B = (x_4, x_3)$ y el valor objetivo es 33/7.

ITERACIÓN 3

Una vez más calculamos los costos reducidos de las variables no básicas:

$$\overline{c_1} = 3 - (15/7, 18/7)(1,0)^T > 0$$
$$\overline{c_2} = 3 - (15/7, 18/7)(0,1)^T > 0$$
$$\overline{c_5} = 11 - (15/7, 18/7)(2,2)^T > 0$$

No hay costos reducidos negativos, por lo tanto la solución actual es óptima.

La solución se obtiene haciendo $(x_B, x_N) = (\overline{b}, 0)$. Es decir, $x_1 = x_2 = x_5 = 0$, $x_3 = 2/7$ y $x_4 = 1/7$. El valor óptimo es 33/7.