Unidad 5

PROGRAMACIÓN ENTERA

En esta quinta Unidad nos dedicaremos a desarrollar los siguientes temas:

SESIÓN 8

5.1 Introducción y objetivos.
5.2 Un ejemplo.
5.3 Problemas lineales enteros, búsqueda en árboles.

5.1 Introducción y objetivos

Describimos uno de los métodos más importantes para programación entera, o sea, para problemas de optimización donde las variables de decisión, o por lo menos alguna, deben tomar valores enteros. Estas variables se usan para representar decisiones lógicas, por ejemplo, una elección entre alternativas discretas. Este método es utilizado por GAMS.

En general, hay 2 tipos de exigencias:

1) $x_i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Este caso es relevante cuando x_i toma valores tan chicos (por ejemplo $0 \leq x_i \leq 15$) que ser redondeados implicaría una simplificación demasiado grande.

2) $x_i \in \{0,1\}$. Este caso se usa para representar decisiones del tipo "una cosa o la otra". Para este último caso se requiere "imaginación" en la formulación del problema, especialmente si se desea obtener un problema lineal para los cuales existen métodos buenos.

5.2 Un ejemplo

Una empresa planea introducirse en un nuevo mercado y plantea tener producción propia en el lugar. El mercado se puede dividir en n áreas de consumo, cada una con una demanda anual de a_j, $j = 1, \ldots, n$. Se han elegido m posibles lugares para las fábricas. En cada lugar se ha planeado una fábrica con capacidad k_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, con costo variable de producción por unidad producida de c_i y un costo de fijo de p_i por año.

La distancia del lugar i al área de consumo j de d_{ij} kilómetros y el costo de transporte por km y unidad de producto es t.

El problema es en qué lugares localizar las fábricas.

Las variables de nuestro problema serán:

z_i = 1 si se construye una fábrica en el área i y 0 si no.
x_{ij} = cantidad transportada de i a j ($x_{ij} \geq 0$)

Entonces, la función objetivo (minimizar los costos) será:

$$\min_{x,z} \quad \sum_i p_i \cdot z_i + \sum_i \sum_j (c_i + t \cdot d_{ij}) \cdot x_{ij}$$

Y las restricciones:

$\sum_i x_{ij} \geq a_j \quad \forall\, j$ (satisfacer demanda)
$\sum_j x_{ij} \leq z_i \cdot k_i \quad \forall\, i$ (no producir por encima de la capacidad)
$x_{ij} \geq 0$, $z_i \in \{0, 1\}$

5.3 Problemas lineales enteros, búsqueda en árboles

Para problemas lineales (como el anterior) existen métodos bastante efectivos que pueden solucionar problemas de varios cientos de variables. Estos métodos están bajo el nombre general de "búsqueda en árbol" (Branch & Bound).

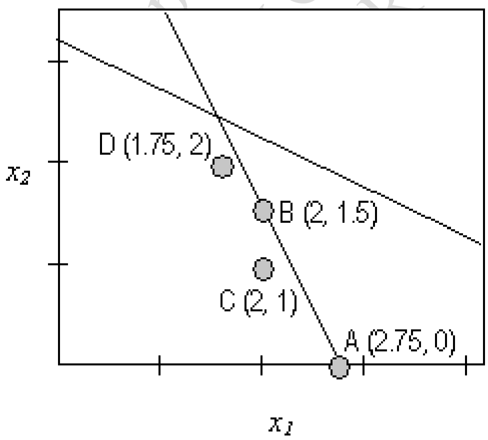
Estos métodos se basan en 3 estrategias básicas:

- relajación
- partición (ramificación)
- vaciamiento

Prácticamente todos los paquetes comerciales tienen la misma estructura. El B & B se explica mejor con un ejemplo. Sea el siguiente problema de programación lineal entera (PLE):

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & 4x_1 + x_2 \\
\text{sujeto a} & 4x_1 + 2x_2 \leq 11 \\
 & 2x_1 + 4x_2 \leq 13 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}
\end{array}
$$

La región factible es:



Primero se relaja el problema relajando la restricción x_1, x_2 enteras (en el caso de una variable binaria se cambia por la restricción $0 \leq x_i \leq 1$). Se obtiene entonces un problema lineal, que es relativamente más fácil de solucionar con el método simplex. Por claridad, solucionaremos los PL en forma gráfica.

En nuestro caso tenemos el siguiente PL (P_L):

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & 4x_1 + x_2 \\
\text{sujeto a} & 4x_1 + 2x_2 \leq 11 \\
 & 2x_1 + 4x_2 \leq 13 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

P_L tiene solución en el punto A de la figura, $x_1 = 2.75$ y $x_2 = 0$ (punto marcado en la figura) y el valor óptimo es $z_{PL} = 11$.

Si la solución de P_L **hubiera sido entera**, habríamos obtenido la solución a nuestro problema ¿Por qué podemos afirmar esto?: sea x_L solución óptima de P_L, si x_L es factible de P y $z_L = z$, entonces x_L solución óptima de P.

Si la solución no es entera, particionamos el problema en 2 problemas, "ramificando" en alguna variable. Dado que x_1 es continua en la solución de nuestro PL, ramificamos x_1:

$x_1 \leq 2$
$x_1 \geq 3$

y podemos dividir nuestro problema en 2 subproblemas P1 y P2:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 4x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & 4x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximizar} & 4x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & 4x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{array}$$

La solución óptima de P debe ser solución óptima de P1 o de P2. Si solucionamos P1 y P2, elegimos la mejor de estas como solución de P.

Cada uno de esos problemas enteros se resuelve de la misma forma que el problema original y se ramifican en una serie de subproblemas. Esto puede representarse en un árbol (de ahí el nombre de búsqueda en árbol).

Si encontramos una solución entera para el problema relajado de algún subproblema, habremos encontrado una solución para nuestro problema inicial. Se dice entonces que el problema ha sido vaciado. Hay otros criterios de vaciamiento que veremos más adelante.

1) Si relajamos P1 obtenemos un PL ($P1_L$) que tiene solución óptima en el punto B de la figura: $x_{1L} = 2$, $x_{2L} = 1.5$ y $z_L = 9.5$. Tenemos que particionar de nuevo y ramificamos en $x_2 \leq 1$ o $x_2 \geq 2$ que se corresponde a los problemas P3 y P4:

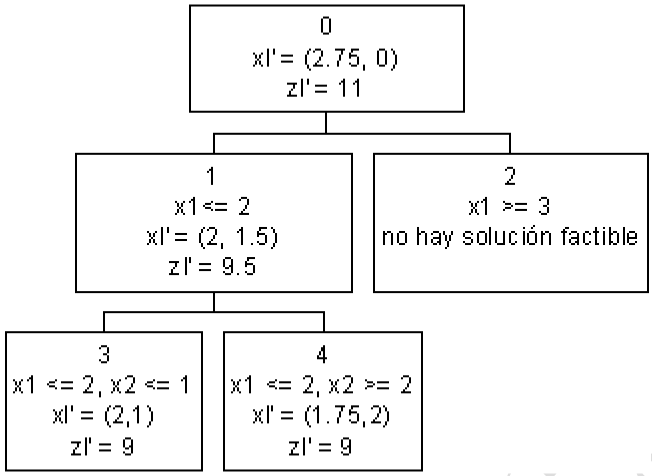
$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 4x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & 4x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximizar} & 4x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & 4x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{array}$$

1.1) Si relajamos P3 tenemos un PL con solución $x_L = (2,1)^T$ con $z_L = 9$ (punto C marcado en la figura). Esta solución es entera y por lo tanto solución óptima de P3. P3 está vacío.

1.2) Nos queda P4. El problema relajado $P4_L$ tiene solución en $x_L = (1.75, 2)^T$ con $z_L = 9$ (punto D marcado en la figura). Dado que $P4_L$ es una relación de P4, el valor óptimo de P4 no puede ser mejor que 9. Pero ya tenemos una solución entera con $z = 9$, entonces, no vale la pena buscar mejores soluciones en P4 y este problema está vacío (este es el tercer criterio de vaciamiento).

2) Si relajamos P2 tenemos $P2_L$ que no tiene solución (ver figura). Entonces P2 tampoco tiene solución. P2 está vacío (este es el segundo criterio de vaciamiento).

En resumen, la búsqueda siguió el siguiente esquema:



Todos los problemas generados están vacíos y por lo tanto el problema original solucionado. La solución óptima es $x = (2,1)^T$ con $z = 9$.

Resumimos los tres criterios de vaciamiento:

1) x_L (solución óptima del subproblema relajado) es entera. Entonces, x_L es solución óptima del subproblema no relajado.

2) El subproblema relajado no tiene solución. Lo mismo es válido para el subproblema no relajado.

3) z_L (valor óptimo del problema lineal) peor o igual al valor de la mejor solución entera hasta el momento. Entonces el subproblema no relajado no puede tener mejor solución.