Unidad 4

MÉTODO SIMPLEX REVISADO

En esta cuarta Unidad nos dedicaremos a desarrollar los siguientes temas:

SESIÓN 7

4.1 Introducción y objetivo.
4.2 Método Simplex.
4.3 Método Simplex Revisado.
4.4 Algunas ventajas respecto al método común.
4.5 Análisis de sensibilidad.

SESIÓN 7

4.1 Introducción y objetivos

Muchos problemas de planificación en los sectores público y privado pueden ser formulados como problemas de Programación Lineal (PL).

Tres ejemplos de problemas típicos que se solucionan diariamente son:

- **Optimización de producción:** Se presentan generalmente en industrias como la del hierro y la de la celulosa entre otras. Se determinan volúmenes óptimos de producción de distintos productos, teniendo en cuenta limitaciones de materia prima y mercado.
- **Problemas de mezclas:** Se presentan en la industria petrolera (por ejemplo: mezclas de benzina y asfalto) y en la industria de alimentos para personas y animales.
- **Problema de transporte:** Se utilizan para la determinación de cuáles fábricas / depósitos sirven a qué clientes.

Los PL se resuelven, casi sin excepción, con el método Simplex, que debe ser el método de optimización más usado para problemas de planificación.

Un motivo importante por el cual los PL han sido tan aceptados es, justamente, el hecho de que el método Simplex es tan efectivo para solucionarlos. El método Simplex en su forma más sencilla fue tratado en el curso "Introducción a la Investigación de Operaciones".

En la práctica, se usan variantes que se adecuan mejor para cálculos numéricos (en computadoras) sobre todo cuando se resuelven problemas grandes.
El objetivo es entonces adquirir conocimientos en una variante más avanzada del Método Simplex: el Método Simplex Revisado, y poder aplicarlo a problemas lineales.

4.2 El Método Simplex

Estudiamos problemas PL en su forma estándar:

$$(P)\begin{cases} \min c^T x \\ s.a. \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Supondremos que la matriz A tiene dimensiones $m \times n$ (con $n > m$) y rango m (es decir, sus filas son linealmente independientes).

Notación y conceptos previos

Notaremos a las columnas de A como $a_1,...,a_n$.
Un vector x es una solución factible de P si $Ax = b$ y $x \geq 0$.
Una base del sistema $Ax = b$ son m columnas linealmente independientes en A.

Dada una base, podemos particionar la matriz A del problema en dos sub-matrices: una con las columnas correspondientes a la base (matriz básica) y otra con el resto de las columnas (matriz no básica).

La matriz básica asociada a la base $a_{b_1},\dots,a_{b_m}$ es una matriz $m \times m$: $B = \left[a_{b_1},\dots,a_{b_m}\right]$ (nótese que esta matriz es no singular) y la matriz no básica N es la matriz $m \times (n-m)$ cuyas columnas están en A pero no en B. La matriz A queda particionada en $A=[B,N]$. Las particiones correspondientes de x y c son:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$$

donde $x_B = \left(x_{b_1},\dots,x_{b_m}\right)^T$ se denomina vector de variables básicas y sus componentes son las variables básicas. Definiciones análogas se realizan para el vector de variables no básicas y variables no básicas.

Definimos el conjunto de índices de las variables no básicas como $J_n = \{1,\dots,n\} \setminus \{b_1,\dots,b_m\}$. Así, N tiene las columnas $\{a_j\}_{j \in J_n}$ y x_N los componentes $\{x_j\}_{j \in J_n}$.

Dada la partición $A=[B,N]$, el problema original puede ser reescrito como

$$(P)\begin{cases} \min c_N^T x_N + c_B^T x_B \\ s.a. \\ \qquad N x_N + B x_B = b \\ \qquad x_N, x_B \geq 0 \end{cases}$$

La solución básica que se corresponde a la base actual se obtiene asignando 0 a todas las variables no básicas, mientras que las básicas se eligen de tal modo de satisfacer $Ax=b$, o sea:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución básica será factible si $x \geq 0$, o sea si $B^{-1}b \geq 0$.

La importancia de las soluciones básicas se desprende del siguiente teorema (que enunciamos sin demostrar).

Teorema. Si (P) tiene alguna solución óptima entonces también hay por lo menos una solución básica factible que es solución óptima de (P).

Geométricamente, las soluciones básicas factibles son los vértices del conjunto convexo $\{x | Ax = b \text{ y } x \geq 0\}$ y el mínimo de la función lineal $c^T x$ sobre dicho conjunto se da, justamente, en un vértice.

El Método Simplex

Supongamos que tenemos una base y que hemos particionado el problema en una parte básica y en una no-básica. Si introducimos una variable extra z que toma el valor de la función objetivo en x, o sea $z = c^T x$, entonces (P) puede ser escrito como:

$$
(P')\begin{cases}
\min z \\
s.a. \\
\qquad Nx_N + Bx_B + 0z = b \\
\qquad c_N^T x_N + c_B^T x_B - z = 0 \\
\qquad x_N, x_B \geq 0
\end{cases}
$$

La tabla del simplex (T') es una forma compacta de escribir el problema:

x_B	x_N	$-z$	LD
B	N	0	b
c_B^T	c_N^T	1	0

Si $x_{b_1},\ldots,x_{b_m}$ son variables básicas del problema (P), entonces $x_{b_1},\ldots,x_{b_m},-z$ son variables básicas adecuadas del problema (P') (es decir, las columnas correspondientes a dichas variables son linealmente independientes). La nueva matriz básica es la matriz no singular $(m+1)\times(m+1)$:

$$
\hat{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ c_B^T & 1 \end{pmatrix}
$$

Si se multiplica las restricciones de (P') desde la izquierda por la matriz:

$$
\hat{B}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -c_B^T B^{-1} & 1 \end{pmatrix}
$$

se obtiene el problema equivalente (por ser $\hat{B}^{-1}$ no singular):

$$
(P'')\begin{cases}
\min z \\
s.a. \\
\qquad B^{-1}Nx_N + Ix_B + 0z = B^{-1}b \\
\qquad \left(c_N^T - c_B^T B^{-1} N\right)x_N + 0x_B - z = -c_B^T B^{-1} b \\
\qquad x_N, x_B \geq 0
\end{cases}
$$

Multiplicar (P') desde la izquierda con $\hat{B}^{-1}$ para obtener (P'') se corresponde a operaciones sencillas sobre las filas del sistema de ecuaciones.

Podemos escribir (P’’) en forma más compacta si introducimos la siguiente notación:

- $\bar{b} = B^{-1}b$: lado derecho transformado (valor de las variables básicas en la solución básica actual).
- $\pi^T = c_B^T B^{-1}$: multiplicadores del simplex.
- $\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N$: costos reducidos.
- $\bar{z} = \pi^T b$: valor de la función objetivo en la solución básica actual.
- $\bar{N} = B^{-1}N$: matriz no básica transformada. $\bar{N}$ tiene las columnas $\{\bar{a}_j\}_{j \in J_n}$ donde $a_j = B^{-1}a_j = (\bar{a}_{1j},\ldots,\bar{a}_{mj})^T$ y J_n es el conjunto de índices de las variables no básicas.

Con esta notación, las restricciones de (P’’) quedan

$$\begin{cases} Ix_B + \bar{N}x_N + 0z = \bar{b} \\ 0x_B + \bar{c}_N^T - z = -\bar{z} \end{cases}$$

Y la tabla correspondiente:

x_B	x_N	$-z$	LD
I	$\bar{N}$	0	$\bar{b}$
0	$\bar{c}_N^T$	1	$-\bar{z}$

En la solución básica actual, $x_j = 0 \quad \forall j \in J_n$, $x_{b_i} = \bar{b}_i$ y $z = \bar{z}$. Si $\bar{b}_i \geq 0 \; \forall i$, la solución básica es factible. Si además $\bar{c}_j \geq 0 \; \forall j \in J_n$, la solución básica actual es óptima.

Si $\bar{c}_j < 0$ para algún $j \in J_n$, vale la pena cambiar de base dejando que x_j entre a la base y que alguna variable básica la abandone.

¿Cómo se cambia de base?

Supongamos que tenemos una solución básica factible $x_B = B^{-1}b \geq 0$ y que $\bar{c}_k < 0$, entonces la variable x_k entra a la base. Debe determinarse cuál variable saldrá de la base.

Si aumentamos x_k desde 0 (que es su valor actual, pues es no básica), las variables básicas varían para mantener la factibilidad, según

$$x_{b_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik} x_k$$

Si $\bar{a}_{ik} \leq 0$ podemos aumentar x_k sin límites y x_{b_i} no se hará negativo. Si en cambio, $\bar{a}_{ik} > 0$ podemos aumentar x_k hasta $\bar{b}_i / \bar{a}_{ik}$ y x_{b_i} se hará 0 (si aumentáramos x_k más allá de este valor, x_{b_i} se haría negativo, perdiendo factibilidad).

Entonces, para mantener la factibilidad, x_k aumentará su valor hasta:

$$\min_i \left\{ \frac{b_i}{\bar{a}_{ik}} \middle| \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

y la variable donde se de ese mínimo es la que saldrá de la base.

Si $\bar{a}_{ik} < 0 \; \forall i = 1,\ldots,m$, podemos aumentar x_k sin límites. Como z varía de acuerdo a $z = \bar{z} + \bar{c}_k x_k$ donde $\bar{c}_k < 0$, podemos disminuir el valor de la función objetivo tanto como queramos sin perder factibilidad. El problema no tiene valor óptimo finito en este caso, la solución es no acotada.

¿Cómo cambia la tabla?

Supongamos que decidimos que x_k entra a la base y que x_{b_r} sale, ¿cómo cambia la tabla? Dado que x_k toma el lugar de x_{b_r} como variable básica, debemos transformar la columna correspondiente a x_k en la columna e_r^T (un vector de ceros, salvo en la posición r, donde tiene un 1). Para eso, multiplicamos la fila r por $1/\bar{a}_{rk}$ (para dejar un 1 en la posición deseada) y luego sustraemos a cada fila un múltiplo adecuado de la fila r (de modo de obtener los ceros correspondientes). Estas operaciones se denominan pivotear sobre $\bar{a}_{rk}$.

Obtendremos una tabla equivalente, porque sólo hicimos combinaciones lineales de las ecuaciones. Debe notarse que las columnas del resto de las variables básicas no cambian con esas transformaciones.

Esquema general del Método Simplex

1. Dada una solución básica factible con su tabla correspondiente.
2. Determinar $\bar{c}_k = \min \left\{ \bar{c}_j \mid j \in N \right\}$

   $\bar{c}_k \geq 0$, solución básica actual es óptima, STOP.

   $\bar{c}_k < 0$ algún k, x_k entra a la base.

3. Si $\bar{a}_{ik} \leq 0 \; \forall i = 1, \ldots, m$ el problema no tiene solución acotada, STOP.

   Si no, determinar $r = \min \{1, \ldots, m\}$ de

   $$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \min_{\mathrm{i}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

   x_{b_r} sale de la base.

4. Actualizar la tabla pivoteando sobre el elemento $\bar{a}_{rk}$.

   Cambio de base listo, volver a 2.

Para comenzar la ejecución del simplex se necesita una solución básica factible. Si no tenemos ninguna solución básica inicial natural (en general dada por las variables de holgura), se puede obtener una, solucionando un problema llamado Fase I.

Si suponemos que todas las soluciones básicas factibles son no degeneradas (o sea, $\bar{b}_i > 0\ \forall i$) el valor de z disminuye en cada iteración. Debido a que hay una cantidad finita de soluciones básicas y es imposible volver a una solución básica ya visitada (pues z disminuye en cada iteración), entonces o bien el algoritmo termina en tiempo finito en la solución óptima ($\bar{c}_j > 0\ \forall j$) o no hay solución acotada.

Inclusive con soluciones básicas degeneradas se puede demostrar que el simplex, con alguna estrategia anticicling para elegir la variable básica saliente, converge en una cantidad finita de iteraciones.

4.3 Método Simplex Revisado

Veremos que no es necesario tener toda la tabla del Simplex en cada iteración. Alcanza con conocer el inverso de la base B^{-1} y los multiplicadores del Simplex π^{T} para la base actual. Desde luego, también necesitamos los datos originales del problema.

En lugar de mantener toda la tabla, tendremos:

- Los costos reducidos $\bar{c}_j$ de las variables no básicas. Que calcularemos como $\bar{c}_j = c_j - \pi^T a_j$
- La columna actualizada para la variable que entra a la base. Esta columna se calcula como $\bar{a}_k = B^{-1} a_k$
- El lado derecho actualizado $\bar{b}$, que se calcula como $\bar{b} = B^{-1} b$

Entonces, lo único que debemos actualizar entre dos iteraciones es B^{-1} y π^T (que es, en realidad, $c_B^T B^{-1}$).

Para entender su funcionamiento, consideremos la siguiente tabla:

B	*N*	0	*b*	*I*
c_B^T	c_N^T	1	0	0

que es la tabla del simplex salvo por el último grupo de columnas.

Realizando las mismas operaciones sobre esta tabla, que sobre la tabla del método Simplex, obtenemos:

I	$\bar{N}$	0	$\bar{b}$	B^{-1}
0	$\bar{c}_N^T$	1	$-\bar{z}$	π^{T}

Notamos lo siguiente:

la parte extra de esta tabla contiene B^{-1} y π^{T}.

la columna $\begin{pmatrix} \bar{b} \\ -\bar{z} \end{pmatrix}$ se actualiza con las mismas operaciones que $\begin{pmatrix} B^{-1} \\ -\pi^T \end{pmatrix}$.

Dada la columna actualizada $\begin{pmatrix} \bar{a}_k \\ \bar{c}_k \end{pmatrix}$ para la variable que entra a la base, y siendo x_{b_i} la variable que sale de la base, podemos actualizar B^{-1}, π^{T}, $\bar{b}$ y $\bar{z}$ con el siguiente procedimiento:

- Construir la mini tabla del Simplex Revisado:

$\bar{a}_k$	$\bar{b}$	B^{-1}
$\bar{c}_k$	$-\bar{z}$	$-\pi^{\mathrm{T}}$

- Pivotear sobre $\bar{a}_{rk}$, para que $\begin{pmatrix} \bar{a}_k \\ \bar{c}_k \end{pmatrix}$ se transforme en $\begin{pmatrix} e_r \\ 0 \end{pmatrix}$. La nueva tabla es:

e_r	$\bar{b}_n$	B_n^{-1}
0	$-\bar{z}_n$	$-\pi_n^T$

donde el índice n significa el valor actual en la nueva base.

Esquema del método Simplex Revisado

1. Dados B^{-1}, π^{T}, $\bar{b}$ y $\bar{z}$ para la base factible actual.

2. Determinar $\bar{c}_k = \min\{\bar{c}_k \mid k \in N\}$
$\bar{c}_k \geq 0$, solución básica actual es óptima, STOP.
$\bar{c}_k < 0$ algún k, x_k entra a la base.

3. Calcular la columna actualizada: $\bar{a}_k = B^{-1}a_k$.
Si $\bar{a}_{ik} \leq 0 \; \forall i = 1, \ldots, m$ el problema no tiene solución acotada, STOP.
Sino, determinar $r = \min\{1, \ldots, m\}$ de

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \min_{\mathrm{i}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

x_{b_r} sale de la base.

4. Actualizar B^{-1}, π^{T}, $\bar{b}$ y $\bar{z}$ de acuerdo a la nueva base, pivoteando sobre el elemento $\bar{a}_{rk}$ en la mini tabla del Simplex Revisado.
Poner $b_r := k$, volver a 2.

4.4 Algunas ventajas con respecto al método común

- En general $n >> m$ por lo que es más rápido pivotear en la mini tabla del Simplex Revisado que en la tabla del método común.

- La matriz A es, en general, dispersa o sea que la mayor parte de los elementos son iguales a 0. Esto se puede aprovechar en Simplex Revisado, salteándose multiplicaciones donde un factor es 0. Además, se guardan solamente elementos distintos de 0. En el método común, la matriz actualizada se llena rápidamente de elementos distintos de 0, lo que lleva a mayores tiempos de ejecución y mayor necesidad de memoria.

- Todas las computadoras calculan con precisión finita por lo que es inevitable que surjan errores numéricos. En el Simplex Revisado se tiene mayor control sobre esos errores. Por un lado, se trabaja con los datos originales directamente (A, b y c). Por otro lado, se puede controlar periódicamente si la base actual B^{-1} satisface $B{\cdot}B^{-1}$. Si no lo hace se realiza una reinversión: se calcula un nuevo inverso B^{-1} a partir de la matriz básica B, que es exacta. Esta posibilidad de eliminar errores numéricos no existe en el método común.

- Usando el Simplex Revisado no es necesario conocer desde el principio todas las columnas de la matriz A. Esto es imprescindible para *métodos de generación de columnas*.

4.5 Análisis de sensibilidad

Rara vez los coeficientes de un problema de PL sean conocidos de antemano con total exactitud. Puede ser necesario, luego de resolver un problema concreto, analizar cuán sensible es la solución óptima a los cambios en los coeficientes.

Al finalizar la resolución del problema contamos con la base óptima x_B y el inverso de la matriz básica asociada B^{-1}. Dados esos valores, la solución del problema es $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$ y la solución del dual es $\pi^T = c_B^T B^{-1}$.

Sensibilidad del costo respecto al lado derecho

Suponiendo no degeneración, pequeños cambios en el lado derecho (b) no afectan a la base del problema, esto es, las variables básicas serán las mismas (aunque, claro está, tendrán diferentes valores).

Si el lado derecho pasa a ser $b + \Delta b$, la solución óptima es

$$(x_B + \Delta x_B, 0) \text{ donde } \Delta x_B = B^{-1}\Delta b$$

El incremento en la función objetivo es

$$\Delta z = c_B^T \Delta x_B = c_B^T B^{-1} \Delta b = \pi^T \Delta b$$

Es decir, la solución del problema dual da la sensibilidad del valor óptimo respecto a pequeños cambios en el lado derecho. Si en lugar de solucionar el problema con lado derecho b solucionamos uno con lado derecho $b + \Delta b$, el costo del primero será $\bar{z}$ y el del segundo $\bar{z} + \pi^T \Delta b$.

Esta interpretación del dual está estréchamente ligada a su interpretación como vector de Multiplicadores Simplex. Dado que π_j es el costo de construir el vector e_j desde la base x_B, π_j mide directamente el cambio en el costo como resultado de la modificación en el componente j del vector b.

Entonces, π_j puede considerarse como el precio o costo marginal del componente b_j, pues si b_j cambia a $b_j + \Delta b_j$, el valor óptimo cambia con $\pi^T \Delta b_j$.

Sensibilidad de la base respecto a los costos y el lado derecho

Veremos cómo determinar cuánto puede variarse coeficientes b y c del problema sin cambiar la base óptima. Es decir, determinar intervalos en los que puede variar cada coeficiente de modo que x_B siga siendo una base óptima.

Supongamos que las variaciones del problema están dadas por Δc y Δb. Para que la base siga dando una solución óptima debe imponerse que, en el nuevo problema, x_B cumpla dos condiciones: ser factible y ser óptima.

La factibilidad exige que la solución sea no negativa:

$$B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

Para la optimalidad imponemos que los costos reducidos de las variables no básicas sean no negativos. Dado que los costos reducidos están dados por $c^T - \pi^T A$, tenemos:

$$(c_N + \Delta c_N)^T - (c_B + \Delta c_B)^T B^{-1} A \geq 0$$

Resolviendo estas dos inecuaciones simultáneamente, obtenemos intervalos en los que se puede variar Δc y Δb sin afectar la base óptima.