Unidad 3

OPTIMIZACIÓN Y MODELACIÓN

En esta tercera Unidad nos dedicaremos a desarrollar los siguientes temas:

SESIÓN 5

3.1 Introducción.
3.2 Ejemplo y terminología.
3.3 Programación Matemática.
3.4 ¿Qué es un modelo?
3.5 ¿Por qué modelar?
3.6 Evaluación y Optimización.
3.7 Modelos de Optimización.

SESIÓN 6

3.8 Un buen modelo.
3.9 Lenguajes.
3.10 Aplicaciones.
3.11 Programación Lineal.
3.12 Programación Entera.
3.13 Programación No Lineal.

3.1 Introducción

Continuaremos introduciendo conceptos teóricos vinculados con los modelos.

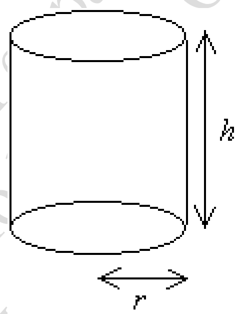
Podemos, informalmente, definir *optimizar* como tratar de hacer algo lo mejor posible y a la *Optimización* como el arte de lograrlo. En la vida real, esto es generalmente demasiado bueno para ser verdad. Sin embargo, es posible determinar soluciones óptimas de problemas de programación matemática, o sea, modelos matemáticos de problemas de decisión.

Tenemos la esperanza de que, si la relación entre el modelo y la realidad es buena, también lo sea la solución encontrada. Lamentablemente, cuanto mejor sea esta relación, más difícil es encontrar una solución óptima del modelo.

A estas dificultades podemos agregar que muchas veces es difícil determinar cuál es realmente el problema. La optimización matemática se adapta mejor para problemas bien definidos.

3.2 Ejemplo y terminología

Supongamos que queremos encontrar la forma óptima de una lata de conservas cilíndrica. Sea h la altura (en dm) y r el radio de la base (en dm).



¿A qué nos referimos, en este caso, con el término "óptima"? Supongamos que queremos minimizar el gasto de material. Queremos, en otras palabras, minimizar el área de la lata. Pero el área disminuye a medida que la lata "encoge". Tenemos, por lo tanto, que fijar el volumen, por ejemplo a 1 dm^3.

Con la altura h y el radio r el volumen de la lata es $V = \pi \cdot h \cdot r^2$. El área es $A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot rh$.

Podemos ahora formular nuestro problema como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad A = 2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot rh \\ &\text{sujeto a:} \quad V = \pi\cdot h\cdot r^2 = 1 \end{aligned}$$

El problema es entonces encontrar los valores de r y h que satisfacen $\pi\cdot h\cdot r^2 = 1$ y que a la vez dan los valores más bajos posibles de $2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot rh$.

¿Es la formulación anterior un buen modelo matemático de nuestro problema? La respuesta es no, nos hemos olvidado de $r > 0$ y $h > 0$.

Tenemos, ahora sí, nuestro problema:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot rh \\
\text{sujeto a:} & V = \pi \cdot h \cdot r^2 = 1 \\
 & r > 0 \\
 & h > 0
\end{array}
$$

En este problema llamamos a r y h variables de decisión.
Lo que se quiere minimizar (o maximizar), en este caso el área (A), se denomina función objetivo. Las exigencias $\pi \cdot h \cdot r^2 = 1$, $r > 0$ y $h > 0$ son las restricciones que deben cumplir las variables de decisión.

Esta es una versión parcialmente abstracta de nuestro problema original. De la única forma que se desprende que lo que queremos hacer es elegir el radio y la altura de tal modo que el área sea mínima, dado el volumen, es por nuestra elección de nombres de variables.

Los problemas de optimización que discutimos son aún más anónimos. Llamamos a nuestras variables x_1 y x_2 etc. A las funciones las llamamos f, g_1, g_2, etc. A este nivel podemos escribir nuestro problema como:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & f(x_1,x_2) = 2 \cdot \pi \cdot x_1^2 + 2 \cdot \pi \cdot x_1 \cdot x_2 \\
\text{sujeto a:} & g(x_1,x_2) = \pi \cdot x_1^2 \cdot x_2 = 1 \\
 & x_1 > 0 \\
 & x_2 > 0
\end{array}
$$

En esta versión, nuestro problema original podría ser cualquier problema (por ejemplo: un problema eléctrico).

Este problema, en particular, puede ser resuelto en forma analítica, transformándolo en un problema de una variable y derivando en una dimensión.

3.3 Programación Matemática

El ejemplo anterior es un ejemplo de los llamados problemas de Programación Matemática. El problema general de programación matemática tiene la siguiente estructura:

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & f(x_1, \ldots, x_n) & \\
\text{sujeto a:} & g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 & \forall\, i = 1,\ldots, l \\
 & h_i(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 & \forall\, i = 1,\ldots, m \\
 & (x_1, \ldots, x_n) \in X &
\end{array}
$$

En este caso tenemos n variables de decisión $x_1, \ldots, x_n$ y distintos tipos de restricciones. Exigimos además que $(x_1, \ldots, x_n)$ pertenezcan a una región específica, la llamada región factible.

La mayor parte de los problemas de optimización que se resuelven en la práctica son justamente del tipo de programación matemática.

3.4 ¿Qué es un modelo?

Los problemas de programación matemática se dividen, a su vez, en distintos casos especiales, dependiendo de las características de f, g_i, h_i y X.

El caso especial más importante es Programación Lineal (PL). Las funciones f, g_i y h_i son lineales en las variables de decisión y X es el cuadrante positivo. El uso típico de PL es para la planificación de la producción a mediano plazo, lo suficientemente largo como para poder ignorar algunos detalles complicados, pero lo suficientemente corto como para tener una buena idea de los recursos de producción y la demanda. El método que más comúnmente se usa para resolver los problemas de PL es el Método Simplex, con el cual se pueden resolver problemas con decenas de miles de variables y miles de restricciones.

Si f, g_i y h_i son no lineales tenemos un problema de Programación No Lineal (PNL). Este es el caso típico de problemas de optimización estructural. Estos problemas son normalmente más difíciles de resolver que PL y cuanto más no lineales más difíciles. En general se pueden resolver problemas de cientos de variables.

El tercer caso especial es el de Programación Entera (PE). En este caso f, g_i y h_i son lineales pero algunas (o todas) de las variables de decisión deben ser enteras. Los casos típicos son los problemas de planificación de inversiones y de planificación de la producción a corto plazo. Estos problemas son también más difíciles que los de PL. En general, se pueden resolver problemas con cientos de variables enteras.

Refrescaremos algunos de los conceptos introducidos en las unidades anteriores.

Un modelo es una estructura construida para exhibir las características de determinados objetos. Generalmente, solo algunas de esas características se retienen en el modelo dependiendo del uso.

Los modelos pueden ser concretos (por ejemplo: el ala de un avión) o abstractos. Estos últimos son en general matemáticos en el sentido de que usan simbolismo algebraico para reflejar la relación interna en el objeto.

Los modelos de optimización usan relaciones matemáticas que se corresponden a relaciones en el mundo real. Es importante entender que un modelo realmente está definido por las relaciones que incorpora y que estas son independientes de los datos del modelo.

Es conveniente recordar que en general queremos maximizar o minimizar algo, conocido como función objetivo. La mayoría de los modelos se pueden clasificar en modelos de Programación Lineal, Programación Entera y Programación No Lineal.

Todos los modelos de programación matemática envuelven optimización.

3.5 ¿Por qué modelar?

Debemos reconocer que la solución de los problemas de hoy exige talentos que van más allá de la combinación de intuición y experiencia.

Es difícil encontrar técnicos que no se hayan beneficiado con una mayor comprensión de los sistemas con los que trabajan, posible gracias a la creación y uso de modelos. En general esa mayor comprensión es causada porque los modelos revelan relaciones que no son aparentes y permiten analizar posibles cambios de curso que no resultaban aparentes.

Se puede y se debe experimentar con un modelo, pero a veces no es posible, ni deseable hacerlo con la realidad.

3.6 Evaluación y Optimización

Los modelos evaluativos operan evaluando alternativas de a una y no generan alternativas ni eligen la mejor. El ejemplo probablemente más conocido y usado es la simulación.

Permiten una cierta flexibilidad, ya que un modelador creativo, con buen entendimiento del sistema puede garantizar un buen grado de seguridad en la representación. Por otro lado, existe un límite práctico a la cantidad de alternativas que pueden ser evaluadas.

El analista evalúa planes candidatos hasta quedar satisfecho con la prestación de uno o más. No hay garantía de que la elección sea la mejor alternativa posible.

En cambio, los modelos de optimización determinan el mejor plan. Es un modelo con las características del evaluativo a las que se agrega la habilidad de generar automáticamente nuevas alternativas y de testear si una alternativa dada es la mejor.

La construcción de un modelo de optimización podría separarse fundamentalmente en tres pasos, que detallaremos a continuación:

1. En esta primera etapa se busca dar una completa descripción del sistema, especificando las ecuaciones y/o inecuaciones que caracterizan la interrelación de las variables del sistema.
2. En esta etapa se adopta, una medida de efectividad del sistema, una medida que pueda ser juzgada objetivamente. Por ejemplo: el Plan A es mejor que el Plan B. El criterio a elegir puede resultar fácil, como la velocidad (en un modelo físico), el costo o la ganancia (en un modelo económico). En otros casos puede resultar muy difícil, por ejemplo en el caso de un país en el cual se pueden encontrar objetivos en conflicto, como ser disminuir la inflación o disminuir el desempleo; tener una economía sana o tener un ambiente sano. Este tipo de situaciones, pueden presentarse también a empresas, como ser obtener ganancia a corto plazo o tener estabilidad a largo plazo.
3. En esta etapa se realiza la elección del algoritmo para optimización consistente con las restricciones impuesta al (o por el) sistema envuelto en la descripción matemática (primer paso). El algoritmo determina el plan que evaluado a lo largo de las dimensiones sugeridas por las medidas de efectividad(segundo paso), obtiene el mejor de <u>todos</u> los posibles planes factibles.

3.7 Modelos de Optimización

Utilización de computadoras

Algunos problemas de programación matemática pueden ser resueltos con lápiz y papel (por ejemplo, los de los libros de texto). Esto no es posible, en general, para problemas reales. La gran cantidad de cálculos necesarios para resolver un problema real exige el uso de computadoras. La computadora puede ser utilizada en forma eficiente o ineficiente. Un problema real puede llevar mucho tiempo de proceso en una computadora para ser resuelto y por ende un alto costo.

Por ejemplo, para un problema de programación lineal, la cantidad de restricciones es un buen indicador de la dificultad computacional. En general puede ser usada la siguiente regla, el tiempo de solución de un modelo de programación lineal aumenta entre el cuadrado y el cubo con la cantidad de restricciones. Dicho de otro modo, si duplicamos la cantidad de restricciones, aumenta de 4 a 8 veces el tiempo de solución.

Otro aspecto a tener en cuenta es la memoria. Las computadoras tienen límites de memoria y no siempre es posible guardar todos los coeficientes de un modelo. Muchos programas comerciales permiten guardar esta información en un archivo externo.

Existen casos particulares, por ejemplo, cuando la gran mayoría de los coeficientes son iguales a 0 (por ejemplo, el 1% en un modelo con 1000 restricciones). Se guardan en la computadora solo aquellos elementos distintos de 0. Esta técnica es conocida como Sparsity.

Se puede usar la computadora para recibir ayuda en la construcción del modelo. Hay programas conocidos como los generadores de matrices y lenguajes algebraicos, como lo es GAMS.

Definiendo funciones objetivo

Una parte importante de los modelos de optimización es la definición de la función objetivo. Dado un conjunto de restricciones, diferentes funciones objetivo dan probablemente diferentes soluciones óptimas. Esto no siempre es el caso, por ejemplo $x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$, fuerza a la solución $x_1 = x_2 = 1$, independientemente de la función objetivo.

Vamos a suponer que tenemos un problema donde la definición de la función objetivo es relevante. Posibles propuestas de función objetivo son: maximizar la ganancia, minimizar los costos, maximizar la utilidad, maximizar la cantidad de empleados, minimizar la cantidad de empleados o maximizar la satisfacción del cliente. Evidentemente, se pueden sugerir muchas más.

Definiendo restricciones

Otra parte fundamental, es la definición de restricciones. Se comentan algunas limitantes usuales que generan restricciones.

Capacidad de producción: Si los recursos a usar en una actividad productiva son limitados, la relación entre la oferta y los posibles usos de los recursos en los distintos tipos de actividades dan lugar a este tipo de restricciones.

Materia prima al alcance: En caso de existencia limitada esto da lugar a una restricción.

Demanda y limitaciones del mercado: Si existen limites en cuanto a la cantidad posible a vender de un producto, que resulta en una menor producción de la que sería posible, estos limites generan restricciones.

Equilibrio de materiales: A veces es necesario representar el hecho de que la suma de distintas cantidades que entran a algún proceso es igual a la suma de las que salen.

Estipulaciones de calidad: Cuando ciertos ingredientes tienen asociadas alguna medida de cualidad. Estas restricciones abarcan, por ejemplo, resistencia de materiales.

3.8 Un buen modelo

Un modelador puede encontrarse con múltiples problemas. A continuación detallaremos algunos que surgen a menudo.

¿Es el modelo fácil de entender?

Es posible construir un modelo en forma compacta y realista. Esta alternativa conduce en general a dificultades de entendimiento e interpretación de resultados. Un modelo menos compacto puede llevar a un mayor tiempo de solución, pero es en general preferible. Por otro lado, si se usa un lenguaje que "escribe un informe" este se hace cargo de las dificultades de interpretación.

El uso de un modelo compacto es apropiado desde el punto de vista de la facilidad de determinar la solución. Esdeseable el uso de nombres de variables y restricciones que permitan una fácil interpretación de la solución.

¿Es fácil detectar errores?

Esto está estrechamente ligado a lo anterior. Los errores pueden ser de tipeo o de formulación. Para evitarlos, es deseable el uso de un lenguaje algebraico para modelos grandes. Los errores de formulación resultan en que el modelo no sea factible.

¿Es fácil calcular la solución?

Una reducción sustancial en el tiempo de cálculo se puede lograr aprovechando la estructura de un problema. Es necesario que el modelador detecte esa estructura.
Se puede también, a veces, reducir el tamaño del modelo, lo cual es de vital importancia en modelos grandes. Este tipo de reducciones, permite además detectar si el modelo no es factible (no se puede satisfacer todas las restricciones) o si la función objetivo crece en forma ilimitada.

3.9 Lenguajes

Existe una gran cantidad de software para ayudar al usuario a estructurar y cargar un modelo. El mayor obstáculo a la aplicación exitosa de programación matemática es la "interfase" entre el usuario y la computadora.

Algunas de esas dificultades pueden solucionarse liberando al modelador de las necesidades específicas de los paquetes de solución. Se han realizado intentos exitosos de desarrollo de generadores de matrices y lenguajes algebraicos. Algunas de las ventajas que presentan este tipo de programas son: una forma más natural de formato de entrada de datos; resulta más fácil detectar errores; es más fácil de modificar; y el modelo es independiente de los datos.

3.10 Aplicaciones

Destacamos, a continuación, algunas áreas en las cuales esta muy extendido la utilización de este tipo de métodos.

Industria del petróleo: Es probablemente donde se usa más la programación lineal. Los modelos tienen miles o decenas de miles de restricciones. Se utilizan como apoyo a decisiones del tipo: dónde y cuándo comprar crudo, cómo transportarlo, qué derivados producir, etc. Estos modelos incorporan elementos de distribución, localización de recursos, mezclas y probablemente marketing.

Industria química: Las aplicaciones son similares a las anteriores pero los modelos en general no son tan grandes.

Industria manufacturera: Los modelos son utilizados para la localización de recursos. Los recursos son en general, capacidad de procesamiento, materias primas y mano de obra.

Transporte: Se utiliza para modelar problemas de distribución, localización de depósitos, scheduling, asignación, etc.

Finanzas: La aplicación probablemente más conocida sea la de la selección de portafolio. Otra aplicación es la determinación de un paquete de impuestos con el objetivo de mejorar la balanza de pagos.

Agricultura: Los modelos ayudan a decidir qué plantar y dónde hacerlo, cómo expandir la producción y en qué invertir.

Salud: Una aplicación obvia en esta área es localización de recursos, doctores, nurses, hospitales, etc. para lograr el mejor efecto.

Minería: También se utiliza para localización de recursos, es decir, cómo emplear mano de obra y maquinaria.

Mano de obra: Posible movimiento de mano de obra entre diferentes actividades, entrenamiento, promoción, reclutamiento, etc.

Alimentos: Problemas de mezclas, distribución y localización de recursos.

Energía: Problemas de distribución, precios, uso de recursos naturales, planeamiento a corto, mediano y largo plazo.

Marketing: Cómo invertir presupuesto para marketing entre distintos medios de difusión (tv, radio, diarios). Este tipo de problemas es conocido como media scheduling.

Defensa: Localización de recursos, transporte de tropas y material, localización de bases de misiles.

3.11 Programación Lineal (PL)

Presentamos algunas características esenciales de la Programación Lineal:

- Hay una expresión lineal (la función objetivo) a ser minimizada o maximizada.
- Hay una serie de restricciones en forma de expresiones lineales que no pueden exceder algún valor específico (restricciones de ≤). Pueden también ser del tipo ≥ o =, indicando que el valor de cierta expresión lineal no debe estar por debajo de algún valor específico o debe ser igual a éste.
- Se denomina valores específicos a los lados derechos de las restricciones.

La linealidad implica una limitación para muchos problemas prácticos. Expresiones no-lineales pueden, de todas formas, convertirse a una forma lineal adecuada. La razón por la que modelos PL han recibido tanta atención es que son mucho más fáciles de resolver que los de Programación No Lineal (PNL).

Es necesario plantear modelos PL solo en los casos en que es una representación válida de la realidad o una aproximación justificada.

Ejemplo de Programación Lineal

Una compañía produce dos artículos, uno standard y otro deluxe. Una unidad standard contribuye a la ganancia con U$S 10, mientras que una unidad deluxe lo hace con U$S 15.

Para producir estos artículos la compañía cuenta con dos procesos, el proceso de ensamblamiento y el de pulido. La capacidad de ensamblamiento es de 80 horas semanales y la de pulido de 60 horas semanales.

Los tiempos (en horas) de ensamblamiento y pulido para cada tipo de producto se desprenden de la siguiente tabla.

	standard	deluxe
ensamble	4	2
pulido	2	5

Cada unidad de producto usa 4 Kg de materia prima. La compañía tiene 75 Kg de materia prima disponibles por semana. Formularemos como un problema de PL el problema de maximizar la ganancia de la compañía.

Modelo. Introducimos las variables de decisión x_1 y x_2 como la cantidad de producto standard y deluxe respectivamente, a ser producidos. Suponemos que la empresa puede producir partes de unidad (es decir, las variables pueden tomar valores reales).

Restricciones del problema. Cada producto usa 4 Kg de materia prima y la compañía dispone de 75 Kg por semana. Esto nos da la siguiente restricción:

$$4x_1 + 4x_2 \leq 75$$

La capacidad de ensamble de la compañía es de 80 horas y la de pulido de 60 horas. Por otro lado, los tiempos, en horas, de ensamble son de 4 horas para un producto standard y de 2 para un producto deluxe. Los tiempos de pulido son de 2 y 5 horas respectivamente. Esto nos da las siguientes restricciones:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 80 \quad \text{(ensamble)}$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 60 \quad \text{(pulido)}$$

Función objetivo. Finalmente, tenemos la función objetivo de la compañía, maximizar la ganancia. Los productos standard y deluxe contribuyen con 10 y 15 U$S a la ganancia, por lo tanto, la función objetivo es:

$$\text{maximizar } 10x_1 + 15x_2$$

El problema. Resumiendo, tenemos el siguiente problema:

$$\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & 10x_1 + 15x_2 & \\
\text{sujeto a} & 4x_1 + 4x_2 \leq 75 & \text{(disponibilidad)} \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 80 & \text{(ensamble)} \\
 & 2x_1 + 5x_2 \leq 60 & \text{(pulido)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}$$

3.12 Programación Entera

Una gran cantidad de problemas pueden ser modelados usando variables enteras y restricciones lineales. Claramente, es posible pensar en situaciones donde tiene sentido hablar de cantidades enteras de determinados productos (autos, casas, aviones, etc) o del uso de algún recurso entero (mano de obra). En muchos casos es preferible usar PL y luego redondear el resultado, siempre y cuando el error sea despreciable.

Las aplicaciones obvias anteriores oscurecen el poder real de PE como método de modelación. Los modelos de PE más prácticos se restringen a variables 0-1. Esas variables representan decisiones del tipo si o no.

Desde el punto de vista matemático, PE exige muchas veces, la misma cantidad de cálculos que un modelo PL del mismo tamaño. Mientras que un modelo PL de miles de restricciones y variables puede ser resuelto en un tiempo de cálculo razonable, esto no es válido para un modelo PE. Es por lo tanto peligroso generar un modelo PE solo para constatar que no puede ser resuelto en tiempo razonable.

Otro motivo por el cual no se aplica en todos los casos posibles es la dificultad de identificar un modelo como un modelo PE. Damos por lo tanto algunas indicaciones de cuando un problema puede ser formulado como un modelo PE:

Problemas con entradas y salidas discretas: esta clase incluye las aplicaciones más obvias de PE, es decir, cuando solamente es posible usar **unidades enteras** de recursos o hacer unidades enteras de productos.

Problemas con condiciones lógicas: Es común agregar restricciones lógicas a problemas PL. Estas son del tipo: "si se fabrica el producto *A*, se fabrica el producto *B* también", "si esta estación se cierra, entonces se clausuran las dos líneas que terminan en ella", "si esta sucursal se cierra, entoces no se puede satisfacer la demanda de los clientes desde esta sucursal".

Problemas combinatorios: Muchos problemas tienen la característca de tener una gran cantidad de soluciones factibles. Esas dependen de las diferentes formas de realizar operaciones o localizar personas o "cosas" en diferentes posiciones.

Ejemplo de Programación Entera

Un ladrón entra a robar a una casa que contiene n objetos. Cada uno de los objetos tiene un valor v_i y un peso p_i, $i = 1,\ldots, n$. El ladrón posee una mochila que puede cargar un peso máximo de 20 Kg.

Modelo. Introducimos n variables de decisión $x_i = 1$ si robamos el objeto i, 0 sino.

Restricciones del Problema. La única restricción que tenemos es la capacidad de la mochila; el peso total de lo robado no puede exceder los 20 kg es decir,

$$p_1x_1 + \ldots + p_nx_n \leq 20$$

Función objetivo. El objetivo es maximizar el valor de lo robado por lo que la función objetivo es:

$$\text{maximizar } v_1x_1 + \ldots + v_nx_n$$

El problema. El problema del ladrón puede expresarse como:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & v_1x_1 + \ldots + v_nx_n \\ \text{sujeto a} & p_1x_1 + \ldots + p_nx_n \leq 20 \\ & x_i \in \{0,1\} \ \text{ para } i = 1,\ldots, n \end{array}$$

3.13 Programación No Lineal

En este caso la función objetivo o alguna de las restricciones son no-lineales en las variables de decisión.

Ejemplo de Programación No Lineal

Recordemos el problema de PL presentado anteriormente. El modelo de PL era el siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & 10x_1 + 15x_2 & \\
\text{sujeto a} & 4x_1 + 4x_2 \leq 75 & \text{(disponibilidad)} \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 80 & \text{(ensamble)} \\
 & 2x_1 + 5x_2 \leq 60 & \text{(pulido)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Supongamos ahora que la contribución a la ganancia de los distintos productos dependa de la cantidad producida. El aporte del producto standard es ahora U$S $10x_1$ en vez de y U$S $15x_2$ para el producto deluxe. El modelo de nuestro problema de PL cambia ahora a:

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & 10x_1x_1 + 15x_2x_2 & \\
\text{sujeto a} & 4x_1 + 4x_2 \leq 75 & \text{(disponibilidad)} \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 80 & \text{(ensamble)} \\
 & 2x_1 + 5x_2 \leq 60 & \text{(pulido)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

La función objetivo del problema es no-lineal (cuadrática) en las variables de decisión (pero mantenemos la linealidad de las restricciones).