Repaso de Control Lineal

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales
Primer semestre - 2023

Contenido

Bibliografía recomendada

Hay muchos!!!

- Linear Systems - Thomas Kailath;
- A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach (Texts in Applied Mathematics) - Geir Dullerud, Fernando Paganini;
- Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems (Texts in Applied Mathematics, Vol. 6) - Eduardo Sontag

Sistemas Lineales

Descripción del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

- $x \in \mathcal{R}^n$ - estado del sistema;
- $u \in \mathcal{R}^m$ - entrada del sistema;
- $y \in \mathcal{R}^p$ - salida del sistema;
- $A_{n\times n}$, $B_{n\times m}$, $C_{p\times n}$ y $D_{p\times m}$ - matrices de dimensiones adecuadas;
- x_0 es la condición inicial.

Trayectorias del sistema

Trayectoria del estado ($\dot{x} = Ax + Bu$)

$$f^t(x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau)d\tau$$

Salida del sistema ($y = Cx + Du$)

$$y(t) = C.e^{At}x_0 + C.\int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau)d\tau + D.u(t)$$

Para entrada nula:

$$y(t) = y(t) = C.e^{At}x_0 \quad , \quad \text{respuesta propia}$$

Para condición inicial nula:

$$y(t) = C.\int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau)d\tau + D.u(t) \quad , \quad \text{respuesta forzada}$$

Respuesta al impulso y transferencia del sistema

Para **condiciones iniciales nulas**:

Respuesta al impulso $y(t) = C.\int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau)d\tau + D.u(t)$

$$y(t) = h(t) * u(t) \quad , \quad h(t) = Y(t).\left[C.e^{At}.B\right] + D.\delta(t)$$

Matriz de *Transferencia* (haciendo la Transformada de Laplace)

$$Y(s) = H(s).U(s) \quad , \quad H(s) = C.(sI - A)^{-1}.B + D$$

$H(s)$ cociente de polinomios - matriz real racional.
Los polos de $H(s)$ están incluidos en los autovalores de A.

Grado de la transferencia

Máximo exponente presente en $H(s)$ (siempre es $\leq n$).

Sistemas SISO

Sistema SISO: una entrada - una salida (m=p=1)

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad , \quad D(s) = \det(sI - A)$$

$H(s)$ es una función escalar
$H(j\omega) = H(s)$ evaluada en el eje imaginario ($s = j\omega$), se denomina respuesta en frecuencia del sistema.

Respuesta de un sistema lineal a una entrada sinusoidal

- Consideremos una entrada sinusoidal pura $u(t) = A\sin(\omega_0 t)$.
- La respuesta en régimen del sistema lineal será de la forma

$$y(t) = A.|H(j\omega_0)|.\sin\left[\omega_0 t + arg\, H(j\omega_0)\right]$$

- Para señales periódicas, usando la serie de Fourier:

$$u(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u).e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u).H(jn\omega_0).e^{jn\omega_0 t}$$

Estabilidad

Estabilidad según Lyapunov

Es la estabilidad del estado. Se llama también estabilidad *interna*.
Requiere que todos los autovalores de A tengan parte real negativa (A *Hurwitz*).

Estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada)

Esencialmente, implica que *para toda entrada acotada, la respectiva salida es acotada*.
Requiere que todos los polos de $H(s)$ tengan parte real negativa.

Implicancias y equivalencias

La estabilidad interna implica la estabilidad BIBO.
La equivalencia se da si H es de grado n (máximo), lo que requiere que no haya cancelaciones de ceros y polos en $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$.

Previo: Teorema de Cayley-Hamilton

- Denotemos por $p(\lambda)$ al polinomio característico de A:

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

- El Teorema de Cayley-Hamilton dice que A anula su polinomio característico:

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0$$

- Algunas consecuencias:
  - $A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$ y cada potencia de A superior a n puede escribirse como combinación lineal de las $n-1$ primeras.
  - Si existe la inversa de A, entonces A^{-1} también es combinación lineal de las $n-1$ primeras potencias de A.
  - La matriz e^{At} también resulta ser combinación lineal de las $n-1$ primeras potencias de A:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i$$

Controlabilidad

- $x_0 \in \mathcal{R}^n$ es un estado *controlable* en tiempo T dado si existe una entrada $\tilde{u}_0$ definida en el intervalo $[0, T]$ tal que $f^T(x_0) = 0$.

$$0 = e^{AT}.x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}.B.\tilde{u}_0(\tau)d\tau$$

- Esto permite definir un conjunto de estados controlables que, por la linealidad, es un sub-espacio vectorial.
- El sistema es controlable si todo estado es controlable.
- El sistema es controlable $\Leftrightarrow$ la siguiente matriz, denominada *Grammiano de controlabilidad*, tiene rango completo (n)

$$\mathcal{C} = [B\ AB\ A^2B \cdots A^{n-1}B] \qquad (n \times nm)$$

Observabilidad

- $x_0 \in \mathcal{R}^n$ es un estado *observable* en tiempo T si, dado que el sistema se inicia en x_0, si conocemos la entrada $u(t)$ y la salida respectiva $y(t)$ en el intervalo $[0, T]$, entonces es posible recuperar biunívocamente la condición inicial x_0.
- Esto permite definir un conjunto de estados observables que, por la linealidad, es un sub-espacio vectorial.
- El sistema es observable si todo estado es observable.
- El sistema es observable $\Leftrightarrow$ la siguiente matriz, denominada *Grammiano de observabilidad*, tiene rango completo (n)

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (np \times n)$$

Realizaciones controlables y observables

- Podemos describir un sistema tanto por su transferencia $H(s)$ como por sus matrices A, B, C, D.
- Dada $H(s)$, es posible encontrar infinitas *realizaciones* A, B, C, D tales que
$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$
- La realización es controlable y observable $\Leftrightarrow$ el orden de A coincide con el grado de H o, lo que es lo mismo, no hay cancelaciones cero-polo en la expresión de $H(s)$.
- Se dice que la realización es *minimal*.

Test PBH (Popov-Belevitch-Hautus)

- La pareja (A, B) es controlable $\Leftrightarrow$ no existe un autovector **izquierdo** de A ortogonal a las columnas de B:

$$w \neq 0 \quad , \quad w^T A = \lambda w^T \quad , \quad w^T B = 0$$

- La pareja (C, A) es observable $\Leftrightarrow$ no existe un autovector **derecho** de A ortogonal a las columnas de C:

$$v \neq 0 \quad , \quad Av = \lambda v \quad , \quad Cv = 0$$

- Aplicación: (C, A) observable $\Leftrightarrow$ la identidad $Ce^{At}x = 0$, $\forall t \geq 0$ se da sólo para $x = 0$.

Control óptimo

Problema LQR de horizonte infinito

- Dada una condición inicial x_0 fija, y dos matrices $R > 0$ y $Q \geq 0$, definimos el problema del regulador cuadrático así:

$$\min_{u:\mathcal{R}\to\mathcal{R}^m} F(x_0, u) \quad , \quad s.a. \ \dot{x} = Ax + Bu$$

- (A, B) controlable y (C, A) observable.
- $F(x_0, u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$
- Definimos

$$V(x_0) = \min_{u:\mathcal{R}\to\mathcal{R}^m} F(x_0, u)$$

- Principio de optimalidad:

$$V(x_0) = \min_{u:[0,t]\to\mathcal{R}^n} \int_0^t (x^T Q x + u^T R u) d\tau + V\left(f^t(x_0)\right)$$

Control óptimo

Solución:

Se cumple lo siguiente:

- $V(x) = x^T P x$, con $P_{n\times n} > 0$, solución de la ecuación matricial de Riccati:
$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q$$
- La solución óptima es una realimentación de estados: $u = -R^{-1}B^T P x$.
- La función V es de Lyapunov para el sistema realimentado.
- La ecuación de Riccati tiene solución numérica eficiente (LMI).
- Se puede usar la función lqr.m para diseñar un control estabilizante.

Diseño de controladores

- Objetivo: obtener un sistema realimentado estable:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad u = -Kx$$

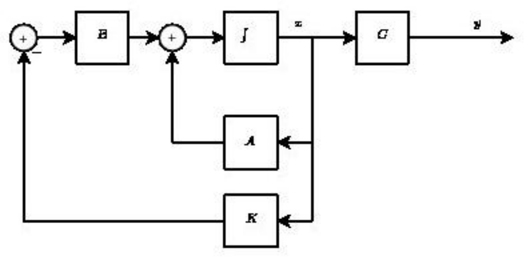
- En lazo cerrado, tenemos:

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

- Debe ser $A - BK$ Hurwitz.
- Existe K tal que $A - BK$ es Hurwitz $\Leftrightarrow$ el par (A, B) es controlable.
- El resultado es más fuerte: si (A, B) es controlable, podemos elegir K tal que los autovalores de $(A - BK)$ estén prácticamente donde queramos.

Diseño de controladores

Diagrama de bloques



Diseño de observadores

- Conociendo el sistema, queremos un observador para el sistema, es decir, un sistema auxiliar, al que excitaremos con la misma entrada que el original, pero que arrancará de una condición inicial distinta, definida por nosotros.
- Realimentamos la información de la salida del sistema auxiliar:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - \tilde{y}) = \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + LC(x - \tilde{x}) \quad , \quad \tilde{x}_0$$

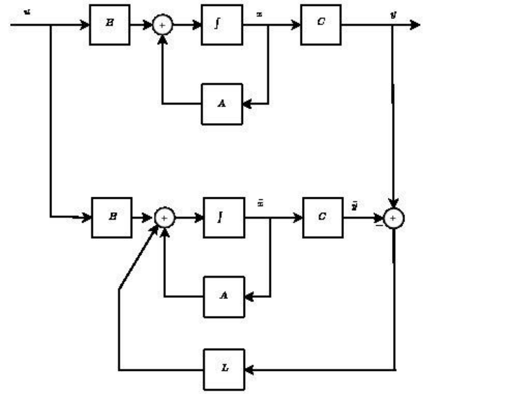
- Comparamos los respectivos estados. La dinámica del error $e = x - \tilde{x}$ es:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\tilde{x}} = (Ax + Bu) - (A\tilde{x} + Bu + LC(x - \tilde{x})) = (A - LC)e$$

- Para que el estado estimado por el observador converja al estado real, $(A - LC)$ debe ser Hurwitz.
- Existe L tal que $A - LC$ es Hurwitz $\Leftrightarrow$ el par (C, A) es observable.

Diseño de observadores

Diagrama de bloques



Sistema completo

- Observamos que podemos diseñar de manera independiente el controlador (K) y el observador (L) (Principio de Separación).
- Realimentamos el estado estimado:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad u = -K\tilde{x}$$

- En lazo cerrado, tenemos lo siguiente:

$$\dot{x} = Ax - BK\tilde{x}$$

- La dinámica total tiene ahora dimensión $2n$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ \dot{\tilde{x}} & = & A\tilde{x} + Bu + L(y - \tilde{y}) \\ y & = & Cx \\ \tilde{y} & = & C\tilde{x} \\ u & = & -K\tilde{x} \end{array} \right.$$

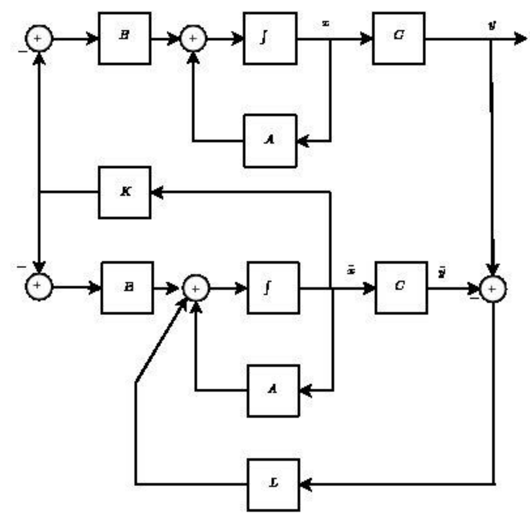
Sistema completo

Escrito de otra manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{z} = \tilde{A}z$$

Sistema completo

Diagrama de bloques



Controlabilidad y observabilidad

Son propiedades algebraicas

- Consideremos el sistema lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

- Consideremos un cambio de variable invertible $\bar{x} = Tx$.
- Entonces:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= T\dot{x} = TAx + TBu = TAT^{-1}\bar{x} + TBu \\ y &= Cx + Du = CT^{-1}\bar{x} + Du \end{cases}$$

- Podemos re-escribirlo así:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}x + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}x + \bar{D}u \end{cases} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \bar{A} = TAT^{-1} & , & \bar{B} = TB \\ \bar{C} = CT^{-1} & , & \bar{D} = D \end{array}$$

A y $\bar{A}$ semejantes!!

Controlabilidad y observabilidad

Son propiedades algebraicas

- Ambos sistemas tienen la misma transferencia y las mismas propiedades de controlabilidad y observabilidad.
- La clave es que los *Grammianos* verifican las relaciones:

$$\bar{\mathcal{C}} = [\bar{B}\ \bar{A}\bar{B}\ \bar{A}^2\bar{B} \cdots \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = T\mathcal{C}$$

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \bar{C}\bar{A}^2 \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T^{-1}$$

- Se preserva el rango.

Controlabilidad y observabilidad

Formas canónicas

- Podemos buscar T particulares , que nos lleven a formas ***canónicas*** de la realización en variables de estado.
- (SISO) Si (A, B) es controlable, entonces existe T tal que

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n1} \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $det(\lambda I - A) = det(\lambda I - \bar{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$

Formas canónicas

Controlador estabilizante

- La realimentación $u = \bar{K}\bar{x} = \bar{k}_1\bar{x}_1 + \bar{k}_2\bar{x}_2 + \ldots + \bar{k}_n\bar{x}_n$ da lugar al sistema $\dot{\bar{x}} = (\bar{A} + \bar{B}\bar{K})\bar{x}$

$$\dot{\bar{x}} = \left[\bar{A} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \ldots \bar{k}_n \end{bmatrix}\right]\bar{x}$$

Formas canónicas

Controlador estabilizante

- Obtenemos

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \bar{k}_1 - a_0 & \bar{k}_2 - a_1 & \bar{k}_3 - a_2 & \dots & \bar{k}_{n-1} - a_{n-2} & \bar{k}_n - a_{n1} \end{bmatrix} \bar{x}$$

- Podemos elegir $\bar{K}$ (y K) para ubicar los valores propios del sistema realimentado donde queramos.
- Algo similar sucede con la forma canónica observable y el diseño del observador.

Sistemas realimentados

Diagrama de Nyquist

- Si el sistema es SISO, la transferencia $G(s)$ es una función escalar. Se llama contorno de Nyquist al gráfico de $re\,[G(j\omega)]$ vs. $im\,[G(j\omega)]$:
- Es una manera gráfica de analizar la estabilidad del sistema realimentado de la figura, de transferencia $G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1+K.G(s)}$.

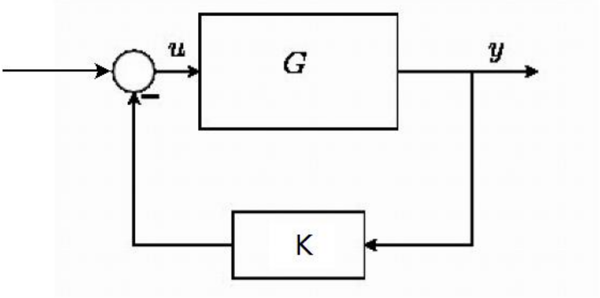
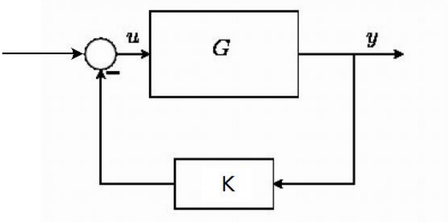


Diagrama de Nyquist



Definamos la transferencia desde la entrada $\tilde{u}$ (sin nombre en la figura) y la salida y. Trabajemos en el dominio de Laplace: $G_{CL}(s) = \frac{Y(s)}{\tilde{U}(s)}$

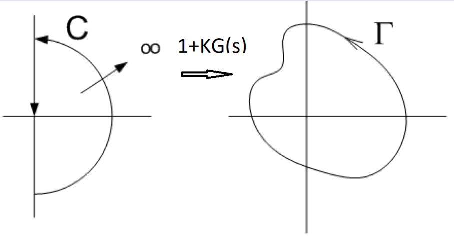
- $Y(s) = G(s).U(s)$, $U(s) = \tilde{U}(s) - K.Y(s)$
- $Y(s) = G(s).\left[\tilde{U}(s) - K.Y(s)\right] \Rightarrow \left[1 + KG(s)\right].Y(s) = G(s).\tilde{U}(s)$

$$\Rightarrow G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1 + KG(s)}$$

- Polos de $G_{CL}(s)$ = ceros de $1 + KG(s)$

Diagrama de Nyquist

Hay que ver los ceros de $1 + KG(s)$ en el semiplano derecho.
Para ello usamos el *Principio del argumento* y lo aplicamos como sigue:



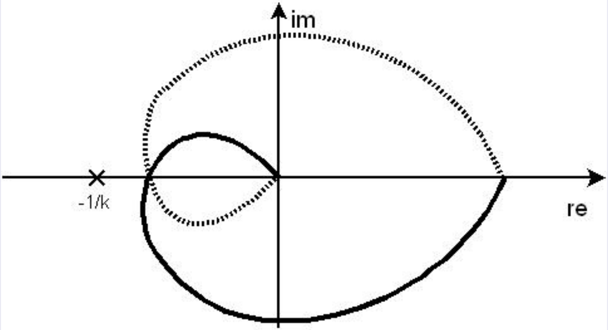
- Dibujamos una semicfa C, orientada, cuyo radio será arbitrariamente grande, para *barrer* el semiplano derecho.
- La mapeamos con $F(s) = 1 + KG(s)$, obteniendo Γ.
- Definimos: P: polos de $F(s)$ en C; Z: ceros de $F(s)$ en C; N: vueltas de Γ alrededor del origen.
- Se cumple que: $N = Z - P$.

Diagrama de Nyquist

Nyquist hace un par de ajustes:

- Orienta C en sentido horario (para que ω crezca al recorrer C).
- Las vueltas son positivas en sentido horario.
- Mapeamos usando $G(s)$, por lo que las vueltas de Γ las cuenta alrededor del punto $-\frac{1}{K}$.

Diagrama de Nyquist

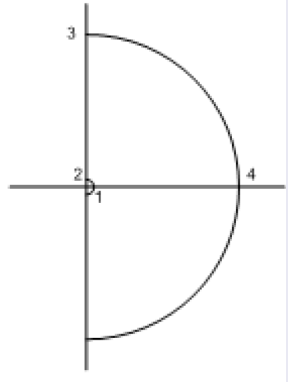


Criterio de Nyquist: Se tiene estabilidad en lazo cerrado si $Z = 0$, es decir, si el diagrama de Nyquist da P vueltas en sentido antihorario alrededor del punto $-\frac{1}{K}$.

Diagrama de Nyquist

Casos particulares

- La curva C no puede pasar ni por ceros ni por polos de $F(s)$.
- Si pasa por un cero de F, significa que existe ω_0 tal que $F(j\omega_0) = 1 + KG(j\omega_0) = 0$, $\Rightarrow$ inestabilidad por polo en el eje (en lazo cerrado).
- Si hay un polo de F en el eje, hay que *esquivarlo*



Para mapear el tramo 1-2, evaluamos en $s = re^{j\theta}$, con θ variando entre 0 y $\pi/2$ y r tendiendo a 0.

Lema de Kalman-Yakubovich-Popov

Lema de KYP

- Es un importante resultado de la década de los sesenta.
- Relaciona la respuesta en frecuencia de un sistema con su comportamiento dinámico en el tiempo.
- Proviene de los llamados sistemas real positivos y sistemas pasivos.

Matriz de transferencia real positiva

- $G(s) = C.(sI - A)^{-1}B + D$ es real positiva si

$$G(j\omega) + \bar{G}^T(j\omega) \geq 0$$

  más otras condiciones técnicas.
- En el caso SISO: $re\,[G(j\omega] \geq 0$, por lo que el Diagrama de Nyquist está contenido en el semiplano derecho.

Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)

- Sea $Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ controlable, observable, A Hurwitz.

$Z(s)$ real positiva si y sólo si existen: un número $\epsilon > 0$ y matrices $P > 0$, W y L de dimensiones adecuadas tales que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A^T P + PA & = & -L^T L - \epsilon P \\ PB & = & C^T - L^T W \\ W^T W & = & D + D^T \end{array} \right.$$

Para su demostración, ver: (Khalil, 1996), (Rantzer, 1996).

La matriz P va a estar relacionada con una función de Lyapunov.

Caso SISO: Nyquist de $Z(s)$ está en el semiplano derecho $\Leftrightarrow$ El sistema de ecuaciones (matricial) tiene solución.

Lema de KYP

Ejemplo de uso

- Supongamos dadas unas matrices A, B, C y K, de dimensiones adecuadas y $D = 1$.
- Consideremos el problema de hallar $P = P^T > 0$, L y $\epsilon > 0$ tales que

$$\begin{cases} A^T P + PA &= -L^T L - \epsilon P \\ PB &= C^T K - \sqrt{2} L^T \end{cases}$$

- El problema tiene solución si la transferencia

$$Z(s) = I + KC(sI - A)^{-1} B$$

es estrictamente real positiva.
- Su Nyquist tiene que estar a la izquierda del eje imaginario!!

Resumen

Sistemas lineales

- Tienen una rica estructura, basada en el álgebra lineal.
- Funciones de Lyapunov cuadráticas
- Observabilidad y controlabilidad.
- Diseño de controladores estabilizantes y observadores asintóticos.
- LQR
- Lema KYP vincula la respuesta en frecuencia con las propiedades dinámicas en variables de estado.