

# Repaso de Control Lineal

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control  
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)  
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República  
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales  
Primer semestre - 2025



# Contenido

- 1 **Sistemas Lineales**
- 2 **Estabilidad**
- 3 **Controlabilidad y observabilidad**
- 4 **Control óptimo lineal**
- 5 **Diseño de controladores y observadores**
- 6 **Nyquist y KYP**

## Bibliografía recomendada

Hay muchos!!!

- Linear Systems - Thomas Kailath;
- A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach (Texts in Applied Mathematics) - Geir Dullerud, Fernando Paganini;
- Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems (Texts in Applied Mathematics, Vol. 6) - Eduardo Sontag

# Sistemas Lineales

## Descripción del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

- $x \in \mathcal{R}^n$  - estado del sistema;
- $u \in \mathcal{R}^m$  - entrada del sistema;
- $y \in \mathcal{R}^p$  - salida del sistema;
- $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times m}$ ,  $C_{p \times n}$  y  $D_{p \times m}$  - matrices de dimensiones adecuadas;
- $x_0$  es la condición inicial.

## Trayectorias del sistema

### Trayectoria del estado ( $\dot{x} = Ax + Bu$ )

$$f^t(x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau)d\tau$$

### Salida del sistema ( $y = Cx + Du$ )

$$y(t) = C.e^{At}x_0 + C. \int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau)d\tau + D.u(t)$$

### Para entrada nula:

$$y(t) = y(t) = C.e^{At}x_0 \quad , \quad \text{respuesta propia}$$

### Para condición inicial nula:

$$y(t) = C. \int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau)d\tau + D.u(t) \quad , \quad \text{respuesta forzada}$$

## Respuesta al impulso y transferencia del sistema

Para **condiciones iniciales nulas**:

**Respuesta al impulso**  $y(t) = C \cdot \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau + D \cdot u(t)$

$$y(t) = h(t) * u(t) \quad , \quad h(t) = Y(t) \cdot [C \cdot e^{At} \cdot B] + D \cdot \delta(t)$$

**Matriz de *Transferencia* (haciendo la Transformada de Laplace)**

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) \quad , \quad H(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

$H(s)$  cociente de polinomios - matriz real racional.

Los polos de  $H(s)$  están incluidos en los autovalores de  $A$ .

**Grado de la transferencia**

Máximo exponente presente en  $H(s)$  (siempre es  $\leq n$ ).

## Sistemas SISO

### Sistema SISO: una entrada - una salida ( $m=p=1$ )

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad D(s) = \det(sI - A)$$

$H(s)$  es una función escalar

$H(j\omega) = H(s)$  evaluada en el eje imaginario ( $s = j\omega$ ), se denomina **respuesta en frecuencia** del sistema.

### Respuesta de un sistema lineal a una entrada **sinusoidal**

- Consideremos una entrada sinusoidal pura  $u(t) = A \sin(\omega_0 t)$ .
- La respuesta en régimen del sistema lineal será de la forma

$$y(t) = A \cdot |H(j\omega_0)| \cdot \sin[\omega_0 t + \arg H(j\omega_0)]$$

- Para señales periódicas, usando la serie de Fourier:

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) \cdot e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) \cdot H(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

## Estabilidad

### Estabilidad según Lyapunov

Es la estabilidad del estado. Se llama también estabilidad *interna*. Requiere que todos los autovalores de  $A$  tengan parte real negativa ( $A$  Hurwitz).

### Estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada)

Esencialmente, implica que *para toda entrada acotada, la respectiva salida es acotada*.

Requiere que todos los polos de  $H(s)$  tengan parte real negativa.

### Implicancias y equivalencias

La estabilidad interna implica la estabilidad BIBO.

La equivalencia se da si  $H$  es de grado  $n$  (máximo), lo que requiere que no haya cancelaciones de ceros y polos en  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ .



## Previo: Teorema de Cayley-Hamilton

- Denotemos por  $p(\lambda)$  al polinomio característico de  $A$ :

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

- El Teorema de Cayley-Hamilton dice que  $A$  anula su polinomio característico:

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

- Algunas consecuencias:
  - $A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$  y cada potencia de  $A$  superior a  $n$  puede escribirse como combinación lineal de las  $n - 1$  primeras.
  - Si existe la inversa de  $A$ , entonces  $A^{-1}$  también es combinación lineal de las  $n - 1$  primeras potencias de  $A$ .
  - La matriz  $e^{At}$  también resulta ser combinación lineal de las  $n - 1$  primeras potencias de  $A$ :

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i$$

# Controlabilidad

- $x_0 \in \mathcal{R}^n$  es un estado *controlable* en tiempo  $T$  dado si existe una entrada  $\tilde{u}_0$  definida en el intervalo  $[0, T]$  tal que  $f^T(x_0) = 0$ .

$$0 = e^{AT} \cdot x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} \cdot B \cdot \tilde{u}_0(\tau) d\tau$$

- Esto permite definir un conjunto de estados controlables que, por la linealidad, es un sub-espacio vectorial.
- El sistema es controlable si todo estado es controlable.
- El sistema es controlable  $\Leftrightarrow$  la siguiente matriz, denominada *Grammiano de controlabilidad*, tiene rango completo ( $n$ )

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B] \quad (n \times nm)$$

## Observabilidad

- $x_0 \in \mathcal{R}^n$  es un estado *observable* en tiempo  $T$  si, dado que el sistema se inicia en  $x_0$ , si conocemos la entrada  $u(t)$  y la salida respectiva  $y(t)$  en el intervalo  $[0, T]$ , entonces es posible recuperar biunívocamente la condición inicial  $x_0$ .
- Esto permite definir un conjunto de estados observables que, por la linealidad, es un sub-espacio vectorial.
- El sistema es observable si todo estado es observable.
- El sistema es observable  $\Leftrightarrow$  la siguiente matriz, denominada *Grammiano de observabilidad*, tiene rango completo ( $n$ )

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (np \times n)$$

## Realizaciones controlables y observables

- Podemos describir un sistema tanto por su transferencia  $H(s)$  como por sus matrices  $A, B, C, D$ .
- Dada  $H(s)$ , es posible encontrar infinitas *realizaciones*  $A, B, C, D$  tales que

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- La realización es controlable y observable  $\Leftrightarrow$  el orden de  $A$  coincide con el grado de  $H$  o, lo que es lo mismo, no hay cancelaciones cero-polo en la expresión de  $H(s)$ .
- Se dice que la realización es *minimal*.

## Test PBH (Popov-Belevitch-Hautus)

- La pareja  $(A, B)$  es controlable  $\Leftrightarrow$  no existe un autovector **izquierdo** de  $A$  ortogonal a las columnas de  $B$ :

$$w \neq 0 \quad , \quad w^T A = \lambda w^T \quad , \quad w^T B = 0$$

- La pareja  $(C, A)$  es observable  $\Leftrightarrow$  no existe un autovector **derecho** de  $A$  ortogonal a las columnas de  $C$ :

$$v \neq 0 \quad , \quad Av = \lambda v \quad , \quad Cv = 0$$

- Aplicación:  $(C, A)$  observable  $\Leftrightarrow$  la identidad  $Ce^{At}x = 0, \forall t \geq 0$  se da sólo para  $x = 0$ .

## Control óptimo

### Problema LQR de horizonte infinito

- Dada una condición inicial  $x_0$  fija, y dos matrices  $R > 0$  y  $Q \geq 0$ , definimos el problema del regulador cuadrático así:

$$\min_{u: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^m} F(x_0, u) \quad , \quad \text{s.a. } \dot{x} = Ax + Bu$$

- $(A, B)$  controlable y  $(C, A)$  observable.
- $F(x_0, u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$
- Definimos

$$V(x_0) = \min_{u: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^m} F(x_0, u)$$

- Principio de optimalidad:

$$V(x_0) = \min_{u: [0, t] \rightarrow \mathcal{R}^n} \int_0^t (x^T Q x + u^T R u) d\tau + V(f^t(x_0))$$

## Control óptimo

### Solución:

Se cumple lo siguiente:

- $V(x) = x^T P x$ , con  $P_{n \times n} > 0$ , solución de la ecuación matricial de Riccati:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P = -Q$$

- La solución óptima es una **realimentación de estados**:  
 $u = -R^{-1} B^T P x$ .
- La función  $V$  es de Lyapunov para el sistema realimentado.
- La ecuación de Riccati tiene solución numérica eficiente (LMI).
- Se puede usar la función `lqr.m` para diseñar un control estabilizante.

## Diseño de controladores

- Objetivo: obtener un sistema realimentado estable:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = -Kx$$

- En lazo cerrado, tenemos:

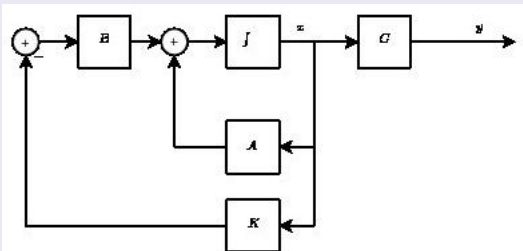
$$\dot{x} = (A - BK)x$$

- Debe ser  $A - BK$  Hurwitz.
- Existe  $K$  tal que  $A - BK$  es Hurwitz  $\Leftrightarrow$  el par  $(A, B)$  es controlable.
- El resultado es más fuerte: si  $(A, B)$  es controlable, podemos elegir  $K$  tal que los autovalores de  $(A - BK)$  estén prácticamente donde queramos.



# Diseño de controladores

## Diagrama de bloques



## Diseño de observadores

- Conociendo el sistema, queremos un **observador** para el sistema, es decir, un sistema auxiliar, al que excitaremos con la misma entrada que el original, pero que arrancará de una condición inicial distinta, definida por nosotros.
- Realimentamos la información de la salida del sistema auxiliar:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - \tilde{y}) = \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + LC(x - \tilde{x}) \quad , \quad \tilde{x}_0$$

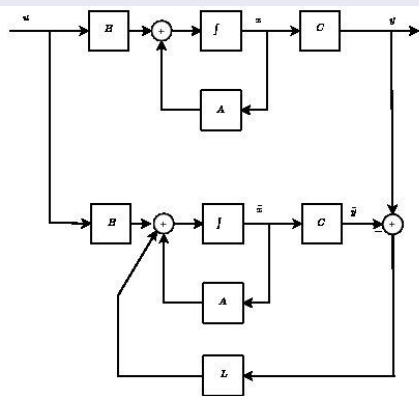
- Comparamos los respectivos estados. La dinámica del error  $e = x - \tilde{x}$  es:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\tilde{x}} = (Ax + Bu) - (A\tilde{x} + Bu + LC(x - \tilde{x})) = (A - LC)e$$

- Para que el estado estimado por el observador converja al estado real,  $(A - LC)$  debe ser Hurwitz.
- Existe  $L$  tal que  $A - LC$  es Hurwitz  $\Leftrightarrow$  el par  $(C, A)$  es observable.

# Diseño de observadores

## Diagrama de bloques



## Sistema completo

- Observamos que podemos diseñar de manera independiente el controlador ( $K$ ) y el observador ( $L$ ) (Principio de Separación).
- Realimentamos el estado estimado:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad u = -K\tilde{x}$$

- En lazo cerrado, tenemos lo siguiente:

$$\dot{x} = Ax - BK\tilde{x}$$

- La dinámica total tiene ahora dimensión  $2n$ :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + L(y - \tilde{y}) \\ y &= Cx \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} \\ u &= -K\tilde{x} \end{cases}$$

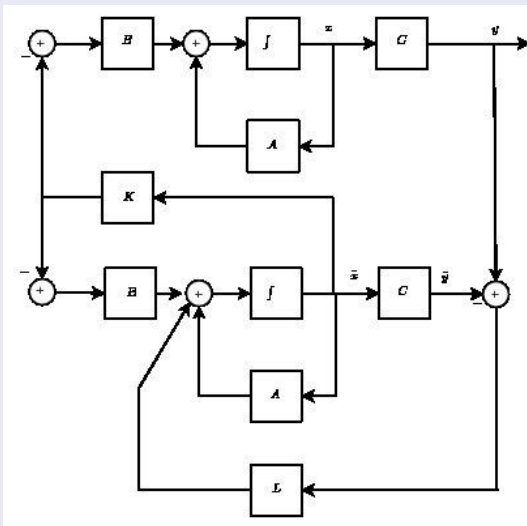
## Sistema completo

Escrito de otra manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{z} = \tilde{A}z$$

# Sistema completo

## Diagrama de bloques



## Controlabilidad y observabilidad

### Son propiedades algebraicas

- Consideremos el sistema lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

- Consideremos un cambio de variable invertible  $\bar{x} = Tx$ .
- Entonces:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= T\dot{x} = TAx + TBu = TAT^{-1}\bar{x} + TBu \\ y &= Cx + Du = CT^{-1}\bar{x} + Du \end{cases}$$

- Podemos re-escribirlo así:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}, \quad \begin{matrix} \bar{A} = TAT^{-1} \\ \bar{C} = CT^{-1} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \bar{B} = TB \\ \bar{D} = D \end{matrix}$$

$A$  y  $\bar{A}$  semejantes!!

## Controlabilidad y observabilidad

### Son propiedades algebraicas

- Ambos sistemas tienen la **misma transferencia** y las mismas propiedades de controlabilidad y observabilidad.
- La clave es que los *Grammianos* verifican las relaciones:

$$\bar{C} = [\bar{B} \ \bar{A}\bar{B} \ \bar{A}^2\bar{B} \ \dots \ \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = TC$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \bar{C}\bar{A}^2 \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = OT^{-1}$$

- Se preserva el rango.



## Controlabilidad y observabilidad

### Formas canónicas

- Podemos buscar  $T$  particulares, que nos lleven a formas **canónicas** de la realización en variables de estado.
- (SISO) Si  $(A, B)$  es controlable, entonces existe  $T$  tal que

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - \bar{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$

## Formas canónicas

### Controlador estabilizante

- La realimentación  $u = \bar{K}\bar{x} = \bar{k}_1\bar{x}_1 + \bar{k}_2\bar{x}_2 + \dots + \bar{k}_n\bar{x}_n$  da lugar al sistema  $\dot{\bar{x}} = (\bar{A} + \bar{B}\bar{K})\bar{x}$

$$\dot{\bar{x}} = \left[ \bar{A} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \dots & \bar{k}_n \end{bmatrix} \right] \bar{x}$$

## Formas canónicas

### Controlador estabilizante

- Obtenemos

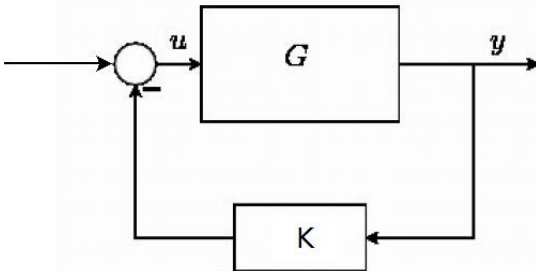
$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \bar{k}_1 - a_0 & \bar{k}_2 - a_1 & \bar{k}_3 - a_2 & \dots & \bar{k}_{n-1} - a_{n-2} & \bar{k}_n - a_{n1} \end{bmatrix} \bar{x}$$

- Podemos elegir  $\bar{K}$  (y  $K$ ) para ubicar los valores propios del sistema realimentado donde queramos.
- Algo similar sucede con la forma canónica observable y el diseño del observador.

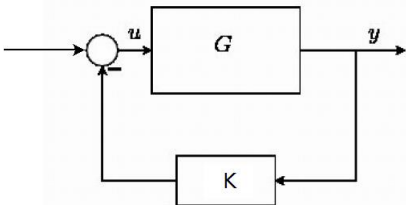
## Sistemas realimentados

### Diagrama de Nyquist

- Si el sistema es SISO, la transferencia  $G(s)$  es una función escalar. Se llama **contorno de Nyquist** al gráfico de  $re [G(j\omega)]$  vs.  $im [G(j\omega)]$ :
- Es una manera gráfica de analizar la estabilidad del sistema realimentado de la figura, de transferencia  $G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1+K \cdot G(s)}$ .



## Diagrama de Nyquist



Definamos la transferencia desde la entrada  $\tilde{u}$  (sin nombre en la figura) y la salida  $y$ . Trabajemos en el dominio de Laplace:  $G_{CL}(s) = \frac{Y(s)}{\tilde{U}(s)}$

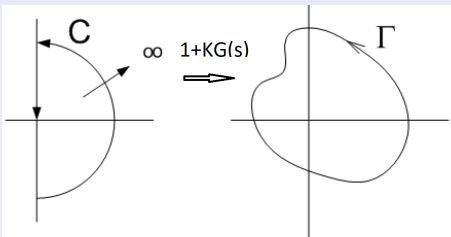
- $Y(s) = G(s).U(s)$ ,  $U(s) = \tilde{U}(s) - K.Y(s)$
- $Y(s) = G(s).[\tilde{U}(s) - K.Y(s)] \Rightarrow [1 + KG(s)].Y(s) = G(s).\tilde{U}(s)$

$$\Rightarrow G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1 + KG(s)}$$

- Polos de  $G_{CL}(s)$  = ceros de  $1 + KG(s)$

## Diagrama de Nyquist

Hay que ver los ceros de  $1 + KG(s)$  en el semiplano derecho. Para ello usamos el *Principio del argumento* y lo aplicamos como sigue:



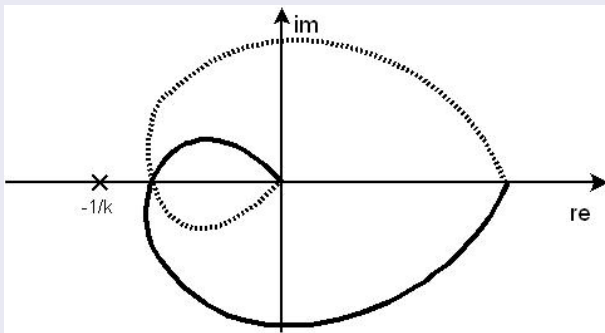
- Dibujamos una semicifa  $C$ , orientada, cuyo radio será arbitrariamente grande, para *barrer* el semiplano derecho.
- La mapeamos con  $F(s) = 1 + KG(s)$ , obteniendo  $\Gamma$ .
- Definimos:  $P$ : polos de  $F(s)$  en  $C$ ;  $Z$ : ceros de  $F(s)$  en  $C$ ;  $N$ : vueltas de  $\Gamma$  alrededor del origen.
- Se cumple que:  $N = Z - P$ .

## Diagrama de Nyquist

Nyquist hace un par de ajustes:

- Orienta  $C$  en sentido horario (para que  $\omega$  crezca al recorrer  $C$ ).
- Las vueltas son positivas en sentido horario.
- Mapeamos usando  $G(s)$ , por lo que las vueltas de  $\Gamma$  las cuenta alrededor del punto  $-\frac{1}{K}$ .

## Diagrama de Nyquist



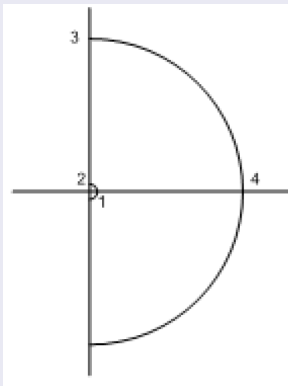
**Criterio de Nyquist:** Se tiene estabilidad en lazo cerrado si  $Z = 0$ , es decir, si el diagrama de Nyquist da  $P$  vueltas en **sentido antihorario** alrededor del punto  $-\frac{1}{K}$ .



## Diagrama de Nyquist

### Casos particulares

- La curva  $C$  no puede pasar ni por ceros ni por polos de  $F(s)$ .
- Si pasa por un cero de  $F$ , significa que existe  $\omega_0$  tal que  $F(j\omega_0) = 1 + KG(j\omega_0) = 0$ ,  $\Rightarrow$  **inestabilidad** por polo en el eje (en lazo cerrado).
- Si hay un polo de  $F$  en el eje, hay que *esquivarlo*



Para mapear el tramo 1-2, evaluamos en  $s = re^{j\theta}$ , con  $\theta$  variando entre  $0$  y  $\pi/2$  y  $r$  tendiendo a  $0$ .

## Lema de Kalman-Yakubovich-Popov

### Lema de KYP

- Es un importante resultado de la década de los sesenta.
- Relaciona la respuesta en frecuencia de un sistema con su comportamiento dinámico en el tiempo.
- Proviene de los llamados sistemas **real positivos** y sistemas **pasivos**.

## Matriz de transferencia real positiva

- $G(s) = C.(sI - A)^{-1}B + D$  es **real positiva** si

$$G(j\omega) + \bar{G}^T(j\omega) \geq 0$$

más otras condiciones técnicas.

- En el caso SISO:  $re [G(j\omega)] \geq 0$ , por lo que el Diagrama de Nyquist está contenido en el semiplano derecho.

## Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)

• Sea  $Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  controlable, observable,  $A$  Hurwitz.  $Z(s)$  real positiva si y sólo si existen: un número  $\epsilon > 0$  y matrices  $P > 0$ ,  $W$  y  $L$  de dimensiones adecuadas tales que

$$\begin{cases} A^T P + PA & = & -L^T L - \epsilon P \\ PB & = & C^T - L^T W \\ W^T W & = & D + D^T \end{cases}$$

Para su demostración, ver: (Khalil, 1996), (Rantzer, 1996).

La matriz  $P$  va a estar relacionada con una función de Lyapunov.

**Caso SISO:** Nyquist de  $Z(s)$  está en el semiplano derecho  $\Leftrightarrow$  El sistema de ecuaciones (matricial) tiene solución.

## Lema de KYP

### Ejemplo de uso

- Supongamos dadas unas matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $K$ , de dimensiones adecuadas y  $D = 1$ .
- Consideremos el problema de hallar  $P = P^T > 0$ ,  $L$  y  $\epsilon > 0$  tales que

$$\begin{cases} A^T P + PA &= -L^T L - \epsilon P \\ PB &= C^T K - \sqrt{2} L^T \end{cases}$$

- El problema tiene solución si la transferencia

$$Z(s) = I + KC(sI - A)^{-1}B$$

es estrictamente real positiva.

- Su Nyquist tiene que estar a la derecha del eje imaginario!!

## Resumen

### Sistemas lineales

- Tienen una rica estructura, basada en el álgebra lineal.
- Funciones de Lyapunov cuadráticas
- Observabilidad y controlabilidad.
- Diseño de controladores estabilizantes y observadores asintóticos.
- LQR
- Lema KYP vincula la respuesta en frecuencia con las propiedades dinámicas en variables de estado.