Diseño Topológico de Redes

Departamento de Investigación Operativa - UDELAR

OBLIGATORIO FINAL - Segundo Semestre de 2015

Dr. Ing. Franco Robledo Amoza

Fecha de Entrega: 30 de Diciembre de 2015

Ejercicio 1: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y un subconjunto de nodos no vacios $T \subset V$. Sabiendo que:

- $STC_{opt}(T, V)$ no tiene nodos de $V \setminus T$.
- Sea $TC^{(\leq 3)}_{opt}(T)$ la mejor solución factible del MW2ECSN respecto de T que no tiene nodos de grado mayor a 3. Sabemos que:
$$\textsc{cost}(TC^{(\leq 3)}_{opt}(T)) = \frac{9}{10}\textsc{cost}(C_{opt}(T)).$$

Probar que:

$$\frac{\textsc{cost}(C_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))} = \frac{10}{9}.$$

Ejercicio 2: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y tres subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2, T_3 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = V$ y $T_i \cap T_j = \emptyset, \forall i, j \in 1..3, i \neq j$. Sabiendo que:

- Considerando el MW2ECSN restringido al conjunto T_i (con $i \in 1..2$) tenemos que:
$$\textsc{cost}(TC_{opt}(T_i)) = \textsc{cost}(STC_{opt}(T_i, T_i \cup T_{i+1})).$$
- Existen dos nodos $t_2 \in T_2$ y $t_3 \in T_3$ tal que
  - $\textsc{cost}(SC_{opt}(T_1, T_2)) = \textsc{cost}(C_{opt}(T_1 \cup \{t_2\}))$ y
  - $\textsc{cost}(SC_{opt}(T_2, T_3)) = \textsc{cost}(C_{opt}(T_2 \cup \{t_3\}))$,

  donde $SC_{opt}(U, W)$ denota el ciclo de costo mínimo que cubre el conjunto de nodos U utilizando como nodos opcionales nodos de $W \setminus U$.
- Existe al menos una solución óptima global del STCNP$(T_1, T_1 \cup T_2)$ que tiene topología de ciclo.
- Existe al menos una solución óptima global del STCNP$(T_2, T_2 \cup T_3)$ que tiene topología de ciclo.
- $\textsc{cost}(TC_{opt}(T_3)) = \textsc{cost}(C_{opt}(T_3))$.
- $\textsc{cost}(TC_{opt}(V)) = \textsc{cost}(TC_{opt}(T_1)) + \textsc{cost}(TC_{opt}(T_2)) + \textsc{cost}(TC_{opt}(T_3))$.

Demostrar que existe una solución óptima global del MW2NCSN respecto de V con topología de ciclo.

Ejercicio 3: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 = T \subseteq V$ y $T_1 \cap T_2 = \{v\}$.
Sabiendo que:

- $STC_{opt}(T_1, V)$ y $STC_{opt}(T_2, V)$ tienen topologías de ciclo.
- una solución óptima global del STECSP(T, V) tiene a v como punto de articulación y al remover v de dicha solución surgen dos componentes conexas, una conteniendo a los nodos de $T_1 \setminus \{v\}$ y la otra a los nodos de $T_2 \setminus \{v\}$.

Demostrar que:

$$\frac{\textsc{cost}(TC_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))} = 1.$$

Donde el STECSP(T, V) (*Steiner two-edge-connected subgraph problem*) consiste en encontrar el subgrafo $H \subseteq G$ 2-arista-conexo de costo mínimo conteniendo a T.

Ejercicio 4: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y tres subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2, T_3 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = T$, $T_1 \cap T_2 = \{u\}$, $T_2 \cap T_3 = \{v\}$, $T_1 \cap T_3 = \{w\}$, con $u \neq v \neq w$.
Sabiendo que:

- $\sum_{i=1}^{3} \textsc{cost}(STC_{opt}(T_i, V)) = \textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))$.
- Las soluciones $STC_{opt}(T_i, V)$, $i \in 1..3$, tienen topologías de ciclo.

Demostrar que:

i) $C_{opt}(T_1) \cup C_{opt}(T_2) \cup C_{opt}(T_3)$ es solución óptima global del problema STESNP(T, V).

ii) Existe una solución óptima global al STESNP(T, V) con topología de ciclo.

Donde el STESNP(T, V) (*Steiner two-edge-survivable network problem*) consiste en encontrar el subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo conteniendo a T tal que $\forall i, j \in T$ existen en H al menos 2 caminos arista-disjuntos comunicando i con j.

Ejercicio 5: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y un subconjunto de nodos no vacios $T \subset V$.
Sabiendo que:

- $\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V)) = \frac{4}{5}\textsc{cost}(TC_{opt}(T))$.
- Sea $TCe^{(\leq 3)}_{opt}(T)$ la mejor solución factible del MW2ECSN respecto de T que no tiene nodos de grado mayor a 3. Sabemos que:
$$\textsc{cost}(TCe^{(\leq 3)}_{opt}(T)) \geq \frac{5}{6}\textsc{cost}(C_{opt}(T)).$$

Probar que:

i) Necesariamente la solución $STC_{opt}(T, V)$ tiene algún nodo de Steiner (nodo de $V \setminus T$) de grado mayor a 2.

ii) Se cumple la desigualdad:
$$\frac{\textsc{cost}(C_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))} \leq \frac{3}{2}.$$

Ejercicio 6: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y un subconjunto de nodos no vacios $T \subset V$. Sea $TCn_{opt}^{(\leq 3)}(T)$ la mejor solución factible del MW2NCSN respecto de T que no tiene nodos de grado mayor a 3. Se sabe que dicha solución factible tiene forma de ciclo. Demostrar que:

$$\frac{\textsc{cost}(C_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T,V))} \leq \frac{4}{3}.$$

Ejercicio 7: Para $k = 3$:

i) Dar un ejemplo donde la solución óptima del problema MW3ECSN tenga costo estrictamente menor al costo de la solución óptima del MW3NCSN.

ii) Dar un ejemplo donde la solución óptima del problema MW3NCSN tenga nodos de grado 3 o 4 y cuya cantidad de nodos sea menor a 6 ($|V| < 2 * 3 = 6$). ¿Se cumple el Teorema de Bienstock?.

iii) Dar un ejemplo donde la solución óptima del problema MW3ECSN sea igual al costo de la solución óptima del MW3NCSN.

Ejercicio 8: Sean $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ tres grafos euclideanos, tal que tienen un único nodo en común $\hat{v}$. Se desea como objetivo encontrar una topología $H \subseteq (G_1 \cup G_2 \cup G_3)$ de costo mínimo tal que H cubre $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ y además $H(V_1)$, $H(V_2)$, y $H(V_3)$ son 2-nodo-conexos.
Sabiendo que $TC_{opt}^{(\leq 3)}(V_i)$, $i \in 1..3$, tienen topología de ciclo, demostrar que:

i) Existe una solución factible $\hat{H}$ computable en orden polinomial tal que: $\frac{d(\hat{H})}{d(H_{opt})} \leq \frac{3}{2}$, donde H_{opt} es el óptimo global al problema.

ii) Dado $\varepsilon > 0$ existe una solución factible $\tilde{H}$ al problema, computable en orden polinomial, tal que $\frac{d(\tilde{H})}{d(H_{opt})} \leq (1+\varepsilon)$. Sugerencia: aplicar el Teorema de Sanjeev Arora [7].

Ejercicio 9: Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ un grafo no-dirigido con costos uniformes asociados a sus aristas. Sea $G_2 = (V_2, E_2)$ un grafo no-dirigido "copia de G_1" tal que $V_1 \cap V_2 = \{w\}$ y con matriz de costos no negativos con desigualdad triangular $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E_2}$. Se desea como objetivo encontrar una topológía $H \subseteq G_1 \cup G_2$ de costo mínimo tal que $H(V_1)$ es 2-arista-conexo y $H(V_2)$ es 3-nodo-conexo.
Demostrar que existe una solución factible al problema $\hat{H}$ computable en orden polinomial, tal que se satisface: $\frac{d(\hat{H})}{d(H_{opt})} \leq 2$, donde H_{opt} es la solución óptima global al problema. Sugerencia: ver [8, 9].

Ejercicio 10: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 = T \subseteq V$ y $T_1 \cap T_2 = \{v\}$.
Sabiendo que:

- $TC_{opt}(T_1)$ y $TC_{opt}(T_2)$ tienen topologías de ciclo.

- una solución óptima global del MW2ECSN tiene a v como punto de articulación y al remover v de dicha solución surgen dos componentes conexas, una conteniendo a los nodos de $T_1 \setminus \{v\}$ y la otra a los nodos de $T_2 \setminus \{v\}$.

Demostrar que:

$$\frac{\textsc{cost}(C_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T,V))} \leq \frac{4}{3}.$$

Ejercicio 11: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G=(V,E)$, una matriz de costos $C=\{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y m subconjuntos $V_i \subseteq V$, $i \in 1..m$, tal que:

- $\forall i \in 1..m$ existe $j \in 1..m$, $j \neq i$, tal que $|V_i \cap V_j| = 1$.
- $\textsc{cost}(TC_{opt}(V)) = \sum_{i=1}^{m} \textsc{cost}(TC_{opt}(V_i))$.

Demostrar que $\bigcup_{i\in 1..m} TC_{opt}(V_i)$ es óptimo global del MW2ECSN con al menos $m-1$ nodos de grado mayor a 3. ¿Esto contradice el Teorema de Monma et al. (Teo. 15) visto en clase?.

Ejercicio 12: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G=(V,E)$, una matriz de costos $C=\{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y tres subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2, T_3 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = T$, $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \{u\}$.
Sabiendo que:

- $\sum_{i=1}^{3} \textsc{cost}(STC_{opt}(T_i, V)) = \frac{3}{4}\textsc{cost}(TC_{opt}(T))$.
- Los nodos de Steiner de $STC_{opt}(T_i, V)$, $i \in 1..3$, tienen grado 2.

Demostrar que:

i) $TC_{opt}(T_1) \cup TC_{opt}(T_2) \cup TC_{opt}(T_3)$ es solución óptima global del problema STESNP(T,V).

ii) Existe un óptimo global del STESNP(T,V) donde el nodo u tiene grado 2.

Nota: el STESNP(T,V) (*Steiner two-edge-survivable network problem*) consiste en encontrar el subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo conteniendo a T tal que $\forall i,j \in T$ existen en H al menos 2 caminos arista-disjuntos comunicando i con j.

Ejercicio 13: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G=(V,E)$, una matriz de costos $C=\{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 = T \subseteq V$ y $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Sabiendo que:

- $\textsc{cost}(TC_{opt}(T_2 \cup \{t\})) \leq \textsc{cost}(TC_{opt}(T_1))$, $\forall t \in T_1$.
- $\textsc{cost}(STC_{opt}(T,V)) = \textsc{cost}(STC_{opt}(T_1,V)) + \textsc{cost}(STC_{opt}(T_2,V))$.
- $\textsc{cost}(STC_{opt}(T_2,V)) \geq \frac{3}{2}\textsc{cost}(STC_{opt}(T_1,V))$.

Demostrar que:

$$\frac{\textsc{cost}(TC_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T,V))} \leq \frac{16}{15}.$$

Ejercicio 14: Sean $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$, $G_3=(V_3,E_3)$ tres grafos completos con desigualdad triangular en los costos de sus aristas, y tal que $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{w\}$, $V_i \cap V_j = \{w\}$, $i \neq j$; $i,j \in 1..3$. Sabiendo que:

- El *sobtour polytope* del TSP asociado a G_1, $S_{opt}(V_1)$, tiene variables enteras asociadas a su solución. Además, $d(S_{opt}(V_1)) = d(TC_{opt}^{(\leq 3)}(V_1))$, siendo $TC_{opt}^{(\leq 3)}(V_1)$ la mejor solución factible al MW2NCSN asociado a G_1 donde todos sus nodos tienen grado menor o igual a 3.

- Se conoce una solución factible óptima del MW2NCSN asociado a G_2, denotada $\mathcal{G}_{opt}$, que tiene el mismo costo que un cierto ciclo hamiltoneano $\hat{C} \subseteq G_2$ que cubre V_2.

- El *sobtour polytope* del TSP asociado a G_3, $S_{opt}(V_3)$, cumple que $d(S_{opt}(V_3)) = d(C_{opt}(V_3))$.

Demostrar que existe una solución óptima al MW2ECSN asociado a

$$G' = (V_1 \cup V_2 \cup V_3, E_1 \cup E_2 \cup E_3),$$

que consiste de tres ciclos que tienen en común solo el nodo w.

Ejercicio 15: Sabido es que si G es un grafo simple completo ponderado, C un ciclo hamiltoniano obtenido por el Algoritmo de Christofides [3] y C^* un ciclo hamiltoniano de peso mínimo, entonces:

$$\frac{\text{cost}(C)}{\text{cost}(C^*)} \leq \frac{3}{2}.$$

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos completos con desigualdad triangular en los costos de sus aristas, y tal que $V_1 \cap V_2 = \{u, v\}$. Sabiendo que:

- $d(TC_{opt}(V_1)) = 100$, con $TC_{opt}(V_1)$ la solución óptima del MW2NCSN asociado a G_1.

- La topología de $TC_{opt}^{(\leq 3)}(V_2)$ es de ciclo y con costo $d(TC_{opt}^{(\leq 3)}(V_2)) = 60$.

Demostrar que existe una solución factible $\mathcal{H}$ correspondiente al MW2NCSN asociado a $H = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, tal que: $\text{cost}(\mathcal{H}) \leq 290$ y además $\mathcal{H}$ tiene topología de ciclo.

Ejercicio 16: Sea $G = (V, E)$ un grafo completo con desigualdad triangular en los costos de sus aristas. Sea $D \subseteq V$ un subconjunto de nodos distinguidos de V. Sabiendo que:

- $d(STC_{opt}(D, V)) = 90$.

- En el *sobtour polytope* del TSP asociado a G, $S_{opt}(D)$, sus variables tienen valores enteros.

Demostrar que el ciclo hamiltoneano que cubre D resultante de aplicar el Algoritmo de Christofides sobre $G(D)$ tiene costo menor o igual a 180.

Ejercicio 17: Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos completos con desigualdad triangular en los costos de sus aristas, y tal que $V_1 \cap V_2 = D \neq \emptyset$. Sabiendo que:

- $STC_{opt}((V_1 \cup V_2) \setminus D, V_1 \cup V_2)$ tiene un único nodo $\hat{w} \in D$ que es además punto de articulación tal que al eliminarlo surgen dos componentes conexas, una que contiene los nodos de $V_1 \setminus \hat{w}$ y la otra los nodos de $V_2 \setminus \hat{w}$.

- $STC_{opt}(V_1 \setminus D, V_1)$ y $STC_{opt}(V_2 \setminus D, V_2)$ tienen ambas soluciones al nodo $\hat{w}$ como único nodo de D.

- $d(STC_{opt}(V_1 \setminus D, V_1)) = 100$ y $d(STC_{opt}(V_2 \setminus D, V_2)) = 80$.

Demostrar que:

i) $d(STC_{opt}((V_1 \cup V_2) \setminus D, V_1 \cup V_2)) = 180$.

ii) $d(TC_{opt}(V_1 \cup V_2)) \leq 240$.

Ejercicio 18: Sea $G = (V, E)$ un grafo completo con desigualdad triangular en los costos de sus aristas. Se define el *Ring Star Problem* (RSP) como el problema de encontrar un subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo que cubre V tal que H esta compuesta por un anillo (ciclo) y los nodos de V que no están en el anillo están conectados directamente a algún nodo del anillo. Sabiendo que:

- Se conoce una solución óptima al RSP de la forma $\mathcal{H} = C \cup F$, con C un anillo que cubre un subset $D \subset V$ y F los links directos que conectan con C los nodos de $V \setminus D$, y además el costo de la solución $\mathcal{H}$ es de 100 (C cuesta 80 y F cuesta 20).

Se define el *Two Connected Star Problem* (TCSP) como el problema de encontrar un subgrafo $\mathcal{G} \subseteq G$ de costo mínimo que cubre V tal que $\mathcal{G}$ esta compuesta por una componente 2-nodo-conexa y los nodos de V que no están en dicha componente están conectados directamente a algún nodo de ella.

i) Sea $\hat{\mathcal{G}} = TC_{opt}(D) \cup F$. ¿Es $\hat{\mathcal{G}}$ una solución óptima del TCSP?. Justifique.

ii) Demuestre que: $\mathrm{cost}(\hat{\mathcal{G}}) \geq 80$.

iii) Se conoce otra solución óptima del RSP, denotada $\hat{C}$, con topología de ciclo (no tiene nodos de grado 1). Demuestre que: $\mathrm{cost}(TC_{opt}(V)) \geq 75$.

Ejercicio 19:

i) Modele como un Problema de Programación Lineal Entera el problema de encontrar un óptimo global al problema MW2NCSN con la ayuda del Teorema de caracterización de Monma et. al. [6].

ii) Modele como un Problema de Programación Lineal Entera el problema de encontrar un óptimo global al problema MW3NCSN con la ayuda del Teorema de caracterización de Bienstock et. al. [2].

iii) Diseñe un Algoritmo Basado en GRASP/VND para el problema 3NCON.

References

[1] M. Baïou, Le problème du sous-graphe Seiner 2-arête connexe: approache polyédrale. PhD thesis, Université de Rennes I, France, 1996.

[2] M. Bienstock, E. F. Brickell, and C. L. Monma, On the structure of minimum-weight k-connected spanning networks, SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 3, num 3, pp. 320-329, Aug. 1990.

[3] N. Christofides, Worst-case analysis of a new heuristic for the Travelling Salesman Problem, Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, 1976.

[4] M. Didi Biha, Graphes k-arête connexes et polyèdres, PhD thesis, Université de Rennes I, France, 1998.

[5] F. Robledo, GRASP heuristics for Wide Area Network design, PhD. thesis, Université de Rennes I, France, 2005.

[6] C. L. Monma, B.S. Munson, and W. R. Pulleyblank, Minimum-weight two-connected spanning networks, Mathematical Programming 46, 153-172, 1990.

[7] S. Arora, Approximation schemes for NP-hard geometric optimization problems: A survey. Mathematical Programming, vol. 97, num. 1-2, pp. 43-69, 2003.

[8] R. Jothi, B. Raghavachari, and S. Varadarajan, A 5/4-approximation algorithm for minimum 2-edge-connectivity. Proceedings of the fourteenth annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Baltimore, Maryland, pp. 725-734, 2003, ISBN:0-89871-538-5.

[9] V. Aulettaa, Y. Dinitzb, Z. Nutovc, and D. Parented, A 2-Approximation Algorithm for Finding an Optimum 3-Vertex-Connected Spanning Subgraph. Journal of Algorithms, vol. 32, num. 1, july 1999, pp. 21-30.