

Diseño Topológico de Redes.

Dr. Ing. Franco Robledo (Responsable del Curso)
IMERL/Dpto. de Investigación Operativa (INCO) - UDELAR
Montevideo, Uruguay

Curso de Postgrado, Setiembre de 2015

Contenido del Curso.

- i) Intruducción - Motivación.
- ii) Fundamentos básicos de la Teoría de Grafos.
- iii) Conectividad en Grafos.
- iv) Diseño de Redes con niveles de sobrevivencia preestablecidos.
- v) Resultados estructurales para redes euclídeas.
- vi) Algoritmos clásicos de diseño topológico.
- vii) Introducción a la Confiabilidad Estructural.
- viii) Heurísticas a medida como herramientas de diseño.
- ix) Presentación de los problemas de diseño topológico a resolver.

Introducción-Motivación.

- i) *“Damage to fiber cable hinders phone service” . Newark Star-Ledger, 22 de Setiembre de 1987.*
- ii) *“Phone snafu isolates New Jersey - Long distance cable severed” . Newark Star-Ledger, 19 de noviembre de 1988.*
- iii) *“Fire in fiber gateway sparks flight delays; problems at brokerages” . Wall Street Journal, 11 de mayo de 1988.*
- iv) *“Chicago’s O’Hare Airport came to a standstill - Emergency 911 was no more - Automatic teller machines in the Chicago area were down - Dollar estimates of lost business ranged from the hundreds of millions to the tens of billions” (8 de mayo de 1988). IEEE Spectrum, páginas 35-36, junio de 1989.*

Introducción-Motivación.

- En los casos (i) y (ii) maquinaria pesada de construcción cortó cables de conexión interurbana. En los casos (iii) y (iv) el fuego destruyó equipamiento electrónico de centrales telefónicas importantes que proporcionaban servicio a muchas otras centrales.
- En cada caso, las redes de comunicación no fueron planificadas con suficiente redundancia como para sobrevivir un simple corte en una línea o la caída de una central telefónica.
- Hasta la década de los '80 la redundancia y sobrevivencia no eran un objetivo importante en el diseño de las tradicionales redes de cobre, puesto que la capacidad limitada de los cables dio lugar al establecimiento de múltiples líneas entre pares de centrales.

Introducción-Motivación.

- Con el advenimiento de la tecnología de fibra óptica y su gran confiabilidad y altísima capacidad de tráfico por cable de fibra se produjeron diseños de redes topologicamente esparsas.
- La posibles consecuencias graves que podrían llegarse a producir ante fallas en componentes de la red de fibra óptica, llevó a tener un especial cuidado en el diseño de tales redes.
- Puntualmente los diseñadores se enfocaron en modelar topologías capaces de mantenerse en estado operativo (i.e. mantener conexas toda o al menos gran parte de la red) ante un número preestablecido de fallas (o destrucciones) de links o centrales telefónicas.

⇒ SE INTRODUCIÓ EL CONCEPTO DE NIVEL DE SOBREVIVENCIA DE UNA RED (*survivability level of a network*).

Fundamentos básicos de la Teoría de Grafos.

Notación: Dado un grafo $G = (V, E)$, denotamos como $|G|$ y $\|G\|$ a la cantidad de nodos y aristas de G respectivamente. Idem con $|V|$ y $|E|$.

Notación: Dado un grafo $G = (V, E)$ y dada una arista $e \in E$ cuyos extremos son $x, y \in V$, la arista e también la denotamos como xy o (x, y) .

Notación: Un grafo completo de n nodos lo denotamos como K^n (usualmente llamado *n-clique*).

Notación: Dado un grafo $G = (V, E)$ y dos subconjuntos de nodos $X, Y \subseteq V$, denotamos con $E(X, Y)$ al conjunto de aristas de E que tienen un extremo en X y otro en Y .

Fundamentos básicos de la Teoría de Grafos.

⇒ MODELAREMOS LAS REDES MEDIANTE GRAFOS SIMPLES NO DIRIGIDOS.

Dados dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ se define:

Grafo Unión: $G \cup G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cup V', E \cup E')$.

Grafo Intersección: $G \cap G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cap V', E \cap E')$.

Si $G \cap G' = \emptyset$ decimos que son grafos disjuntos. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ decimos que G' es un subgrafo de G y denotamos $G' \subseteq G$. Si $G' \subseteq G$ y $G' \neq G$ decimos que G' es subgrafo propio de G . Si $G' \subseteq G$ y G' contiene todas las aristas $(x, y) \in E$ con $x, y \in V'$, entonces G' es un subgrafo inducido de G .

Fundamentos básicos de la Teoría de Grafos.

Notación: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $U \subseteq V$ un subconjunto de nodos, $G(U)$ denota el subgrafo de G cuyas aristas son las aristas de G con extremos en U .

Notación: Si H es un subgrafo de G , no necesariamente inducido, abreviamos $G(V(H))$ como $G(H)$.

Notación: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $U \subseteq V$ un subconjunto de nodos, denotamos $G - U$ o $G \setminus U$ a $G(V \setminus U)$.

Notación: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $F \subseteq V \times V$, denotamos $G - F = (V, E \setminus F)$ y $G + F = (V, E \cup F)$ (o bien $G \cup F$).

Fundamentos básicos de la Teoría de Grafos.

Definición: Decimos que un grafo G es arista-maximal respecto a una propiedad P si G satisface dicha propiedad pero $G + xy$ no la satisface para cualquier par de nodos no adyacentes $x, y \in G$. Decimos que un grafo G es arista-minimal respecto a una propiedad P si G satisface dicha propiedad pero $G \setminus e$ no la satisface para cualquier arista $e \in G$.

Definición: Si G y G' son grafos disjuntos, se define $G * G'$ al grafo obtenido de $G \cup G'$ agregando aristas desde todos los nodos de G hacia todos los nodos de G' .

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ se define el grafo complemento como $\bar{G} \stackrel{\text{def}}{=} (V, (V \times V) \setminus E)$.

Fundamentos básicos de la Teoría de Grafos.

Notación: Dado un grafo G y un nodo $v \in G$, denotamos por $N(v)$ al conjunto de nodos adyacentes a v .

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ definimos como el *grado mínimo de G* (resp. *grado máximo de G*) al número: $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V\}$ (resp. $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V\}$).

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ definimos como el *grado promedio de G* al número: $d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$.

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ definimos como el *grado por nodo de G* al número: $\epsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}$.

Fundamentos básicos de la Teoría de Grafos.

Algunas propiedades de $d(G)$, $\delta(G)$, $\Delta(G)$ y $\epsilon(G)$:

i) $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.

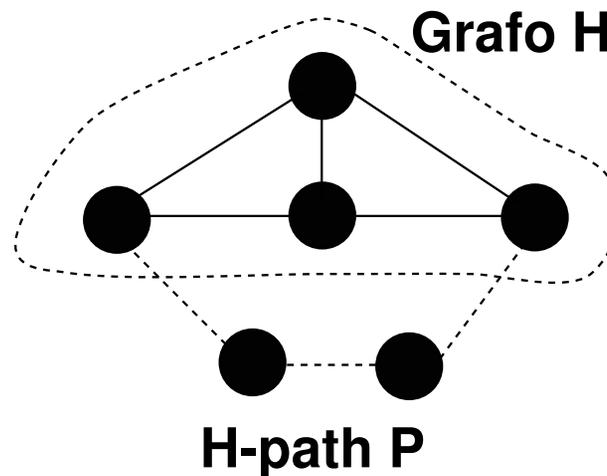
ii) Al sumar todos los grados de los nodos de un grafo, cada arista cuenta dos veces (una por cada extremo), por lo tanto:

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) \cdot |V|.$$

iii) El número de nodos de grado impar en un grafo es siempre par (si V es el conjunto de nodos tenemos $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$ aristas, por lo tanto $\sum_{v \in V} d(v)$ es un número par).

Fundamentos básicos de la Teoría de Grafos.

Definición: Dado un grafo H , decimos que P es un H – *path* si P es no trivial y “toca” a H exactamente en sus extremos. En particular la arista de cualquier H – *path* de largo 1 no es nunca una arista de H .



Ejemplo de H -Path:

Conectividad.

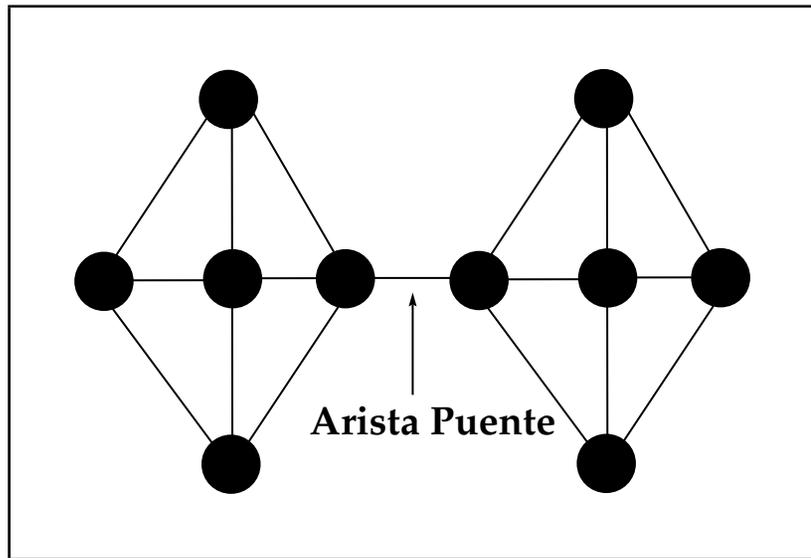
Definición: Un grafo G es conexo si cualquier par de nodos de G está conectado mediante un camino de G .

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo, decimos que $X \subseteq V \cup E$ “separa” G si $G - X$ es desconexo. En particular cuando $X \subseteq E$ decimos que X es un “conjunto de corte”.

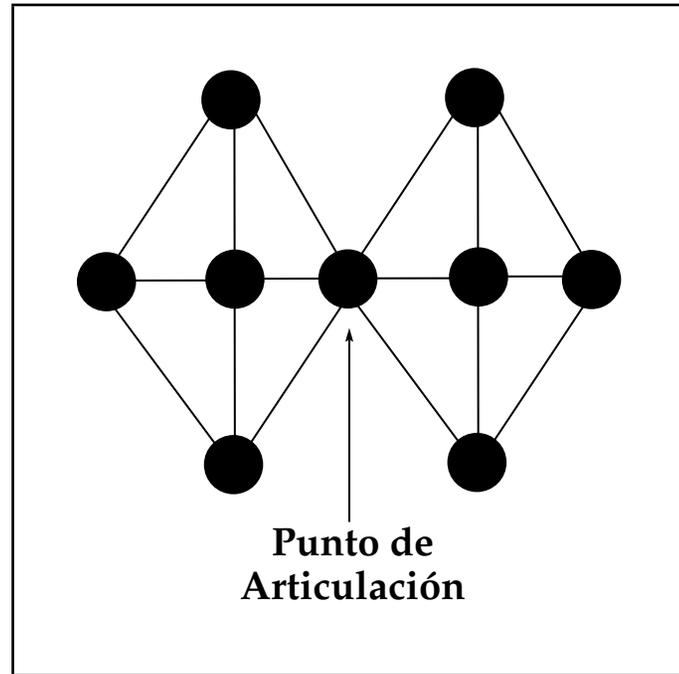
Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo, decimos que un nodo $v \in V$ es un *punto de articulación* si separa a dos nodos de la misma componente; i.e. $G \setminus v$ es desconexo.

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo, decimos que una arista $e \in E$ es un *punto de articulación* si separa a dos nodos de la misma componente; i.e. $G \setminus e$ es desconexo.

Conectividad.



(a) Ejemplo de Arista Puente



(b) Ejemplo de Punto de Articulación

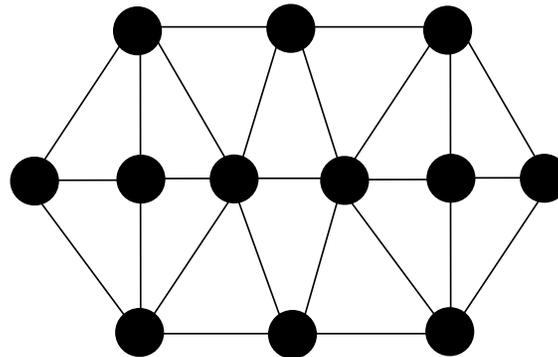
Figure 1: Separadores de cardinalidad 1.

Conectividad.

Definición: Un grafo $G = (V, E)$ es k -nodo-conexo si $|V| > k$ y $G \setminus X$ es conexo para todo $X \subseteq V$ con $|X| < k$. Es decir, ningún par de nodos de G están separados por menos de k nodos.

Definición: El mayor valor de k para el cual un grafo G es k -nodo-conexo se le llama conectividad de G , denotada $k(G)$.

Grafo con $k(G)=3$



Conectividad.

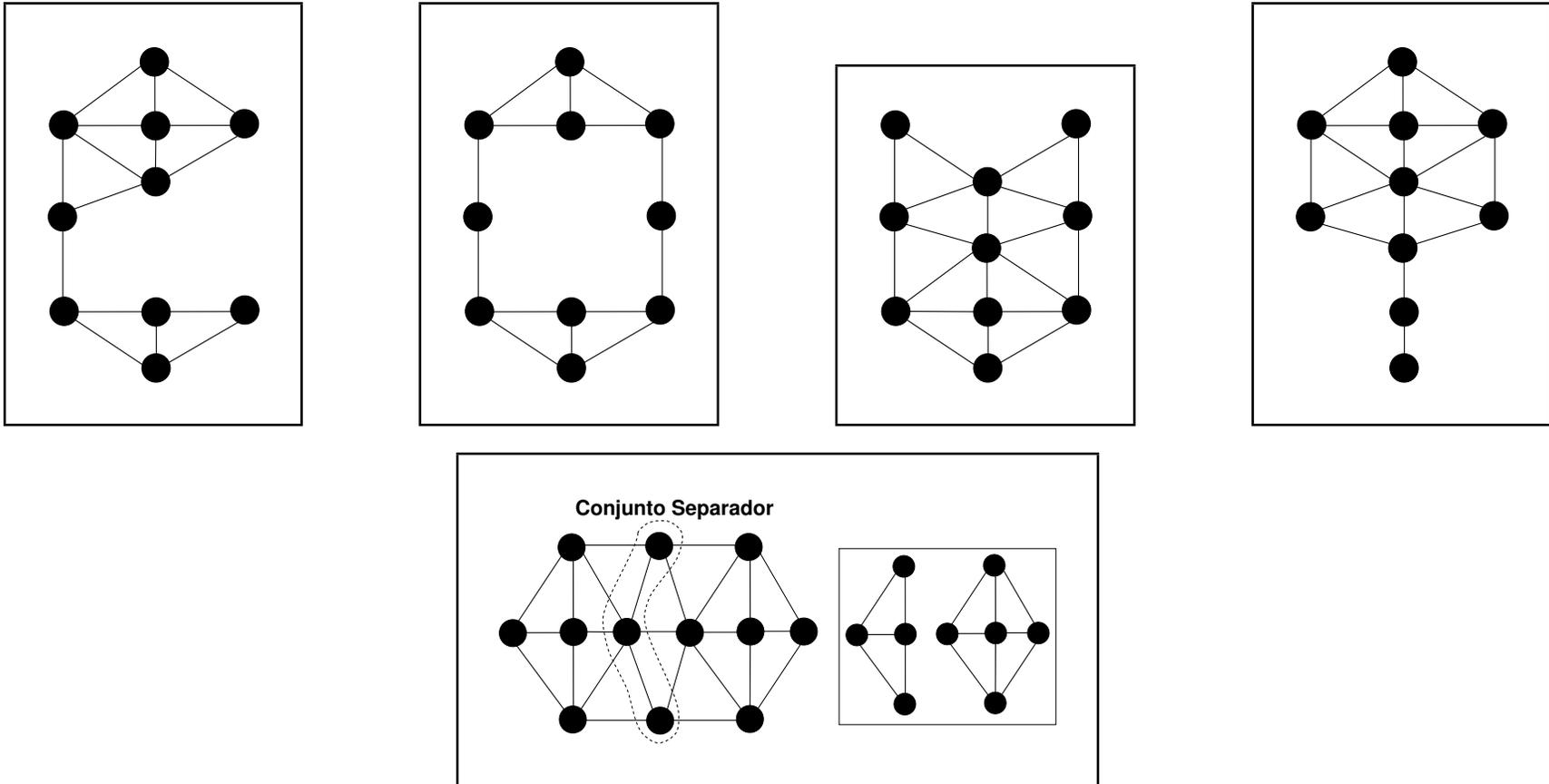
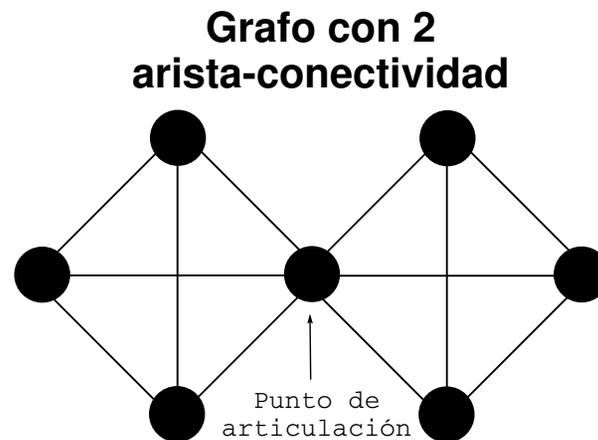


Figure 2: Grafos resultantes de eliminar 2 nodos.

Conectividad.

Definición: Un grafo $G = (V, E)$ es k -arista-conexo si $|V| > k$ y $G \setminus F$ es conexo para todo $F \subseteq E$ con $|F| < k$. Es decir, ningún par de nodos de G están separados por menos de k aristas.

Definición: El mayor valor de k para el cual un grafo G es k -arista-conexo se le llama arista-conectividad de G , denotada $\lambda(G)$.



Conectividad.

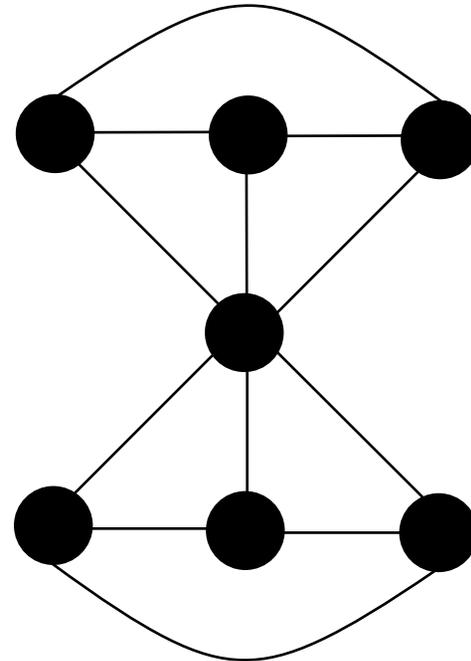
Algunas propiedades y observaciones sobre $k(G)$ y $\lambda(G)$:

i) $k(G) = 0$ sii G es desconexo o es GRAFO CON $k(G) = 1$ Y $\lambda(G) = 3$.
un grafo de un solo nodo.

ii) $k(G) = 1$ sii todo par de nodos de G esta conectado por al menos un camino.

iii) $k(K^n) = \lambda(K^n) = n - 1 \quad \forall n \geq 1$
(K^n denota un n -clique).

iv) $\lambda(G) = 0$ si G es desconexo.



Conectividad.

Proposición 1: *Si $G = (V, E)$ es no trivial entonces $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Dem. Sea $v \in V$ tal que $d(v) = \delta(G)$. Claramente $G \setminus E(v)$ es desconexo, por lo tanto: $\lambda(G) \leq |E(v)| = \delta(G)$. Analicemos ahora la primera desigualdad. Sea $F \subseteq E$ un subconjunto de aristas minimal tal que $G \setminus F$ es desconexo. Veremos que $k(G) \leq |F|$.

CASO A). Supongamos que G tiene un nodo v que no es extremo de ninguna arista de F . Sea C la componente conexa de $G \setminus F$ conteniendo a v . Entonces los nodos de C que son extremo de aristas de F separan v de $G \setminus C$. Dado que ninguna arista de F tiene ambos extremos en C (por minimalidad de F) hay a lo sumo $|F|$ nodos en esta condición, con lo cual $k(G) \leq |F|$.

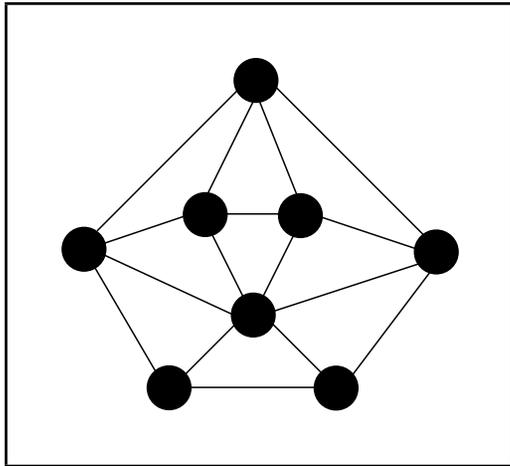
CASO B). Supongamos ahora que cada nodo de G es extremo de alguna arista de F . Sea $v \in V$ cualquier nodo y C la componente conexa de

$G \setminus F$ conteniendo a v . Entonces los nodos $w \in V$ adyacentes a v tal que $(v, w) \notin F$ yacen en C y son extremos de distintas aristas de F , con lo cual $d_G(v) \leq |F|$. Como $N_G(v)$ separa a v de todos los otros nodos de G tenemos que $k(G) \leq |F|$ a menos que no hayan otros nodos, es decir $\{v\} \cup N(v) = V$. Pero v es un nodo arbitrario. Asumiendo que G es completo tenemos: $k(G) = \lambda(G) = |V| - 1$.

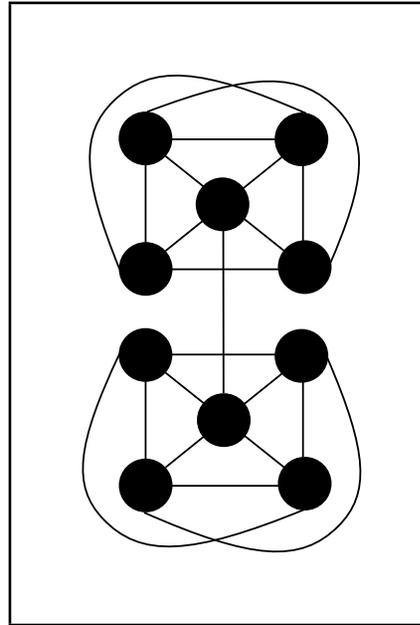
QED

- \Rightarrow NIVELES ALTOS DE NODO-CONECTIVIDAD O ARISTA-CONECTIVIDAD IMPLICAN VALORES ALTOS DEL GRADO MÍNIMO DEL GRAFO.
- \Rightarrow VALORES ALTOS DEL GRADO MÍNIMO DEL GRAFO NO GARANTIZAN NIVELES ALTOS DE NODO-CONECTIVIDAD O ARISTA-CONECTIVIDAD.
- \Rightarrow UN NIVEL ALTO DE ARISTA-CONECTIVIDAD NO NECESARIAMENTE IMPLICA UN NIVEL ALTO DE NODO-CONECTIVIDAD.

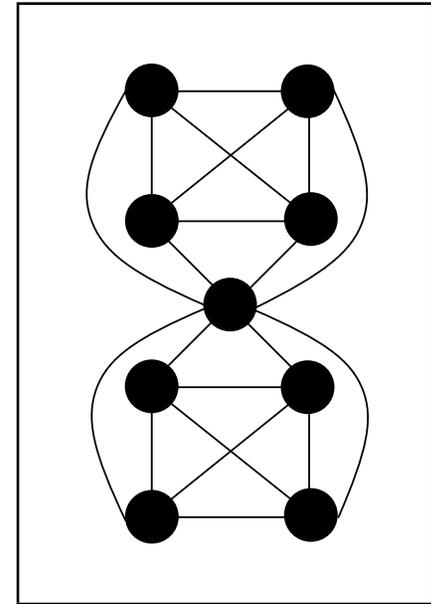
Conectividadad.



(a) $k(G) = \lambda(G) = \delta(G) = 4$.



(b) $k(G) = \lambda(G) = 1$,
 $\delta(G) = 4$.



(c) $\lambda(G) = \delta(G) = 4$,
 $k(G) = 1$.

Figure 3: Distintos casos de valores de $k(G)$, $\lambda(G)$ y $\delta(G)$.

Conectividad.

Teorema 2 (Mader 1972): *Un grafo de grado promedio al menos $4k$ ($d(G) \geq 4k$) tiene un subgrafo k -nodo-conexo.*

Dem. El caso $k \in \{0, 1\}$ es trivial, analizaremos cuando $k \geq 2$. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$, $|E| = m$ y $d(G) \geq k \geq 2$. Por inducción en n probaremos que G tiene un subgrafo k -nodo-conexo siempre que:

i) $n \geq 2k - 1$ y

ii) $m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$.

Esta aserción es de hecho mas fuerte puesto que (i) y (ii) se deducen de la hipótesis $d(G) \geq 4k$. Puntualmente, si no se cumpliera (i) tendríamos

$2k > n + 1$ y por lo tanto $m = \frac{1}{2}d(G)n \geq 2kn > n(n + 1)$; (ii) se deduce directamente de $m = \frac{1}{2}d(G)n \geq 2kn$.

Apliquemos ahora inducción en n .

PASO BASE. Si $n = 2k - 1$ entonces $k = \frac{1}{2}(n + 1)$ y por lo tanto $m \geq \frac{1}{2}n(n - 1)$ por (ii). De este modo $G = K^n \supseteq K^{k+1}$, probando así la propiedad.

PASO INDUCTIVO. Asumamos ahora que $n \geq 2k$. Si v es un nodo con $d(v) \leq 2k - 3$ podemos aplicar hipótesis inductiva a $G \setminus v$ satisfaciéndose el postulado. Asumamos ahora que $\delta(G) \geq 2k - 2$. Si G es k -nodo-conexo no hay nada que probar.

Si G no fuera k -nodo-conexo habría un separador $S \subset V$ con $k - 1$ nodos ($|S| = k - 1$). Podemos asumir que G tiene la forma $G = G_1 \cup G_2$ con $|G_1 \cap G_2| = k - 1$ y $|G_1|, |G_2| < n$. Para cada nodo v de $G_1 \setminus G_2$ o $G_2 \setminus G_1$ tenemos que $d(v) \geq 2k - 2$ (y que existen tales nodos); de este modo $|G_1|, |G_2| \geq 2k - 1$. Pero entonces al menos uno de los grafos G_1, G_2 debe satisfacer la hipótesis inductiva, completando así la demostración.

Si ninguno de los grafos satisface la hipótesis inductiva tendríamos:
 $\|G_i\| \leq (2k - 3)(|G_i| - k + 1)$, para $i = 1, 2$, y por lo tanto:

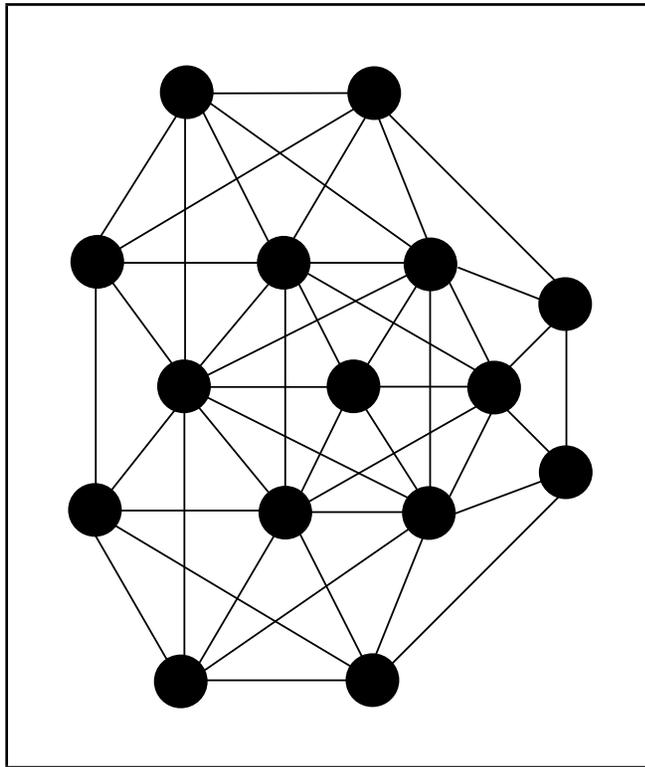
$$\begin{aligned} m &\leq \|G_1\| + \|G_2\| \\ &\leq (2k - 3)(|G_1| + |G_2| - 2k + 2) \\ &\leq (2k - 3)(n - k + 1) \end{aligned}$$

contradiciendo (ii).

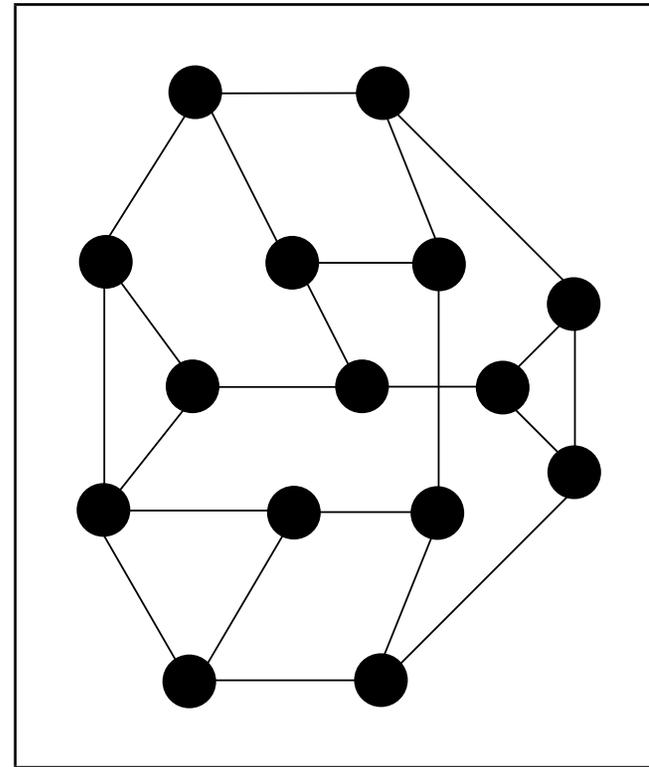
QED

\Rightarrow UN GRAFO G QUE SATISFAGA $d(G) < 4k$ PUEDE SER
EVENTUALMENTE k -NODO-CONEXO O POSEER UN SUBGRAFO $H \subseteq G$
QUE SEA k -NODO-CONEXO.

Conectividad.



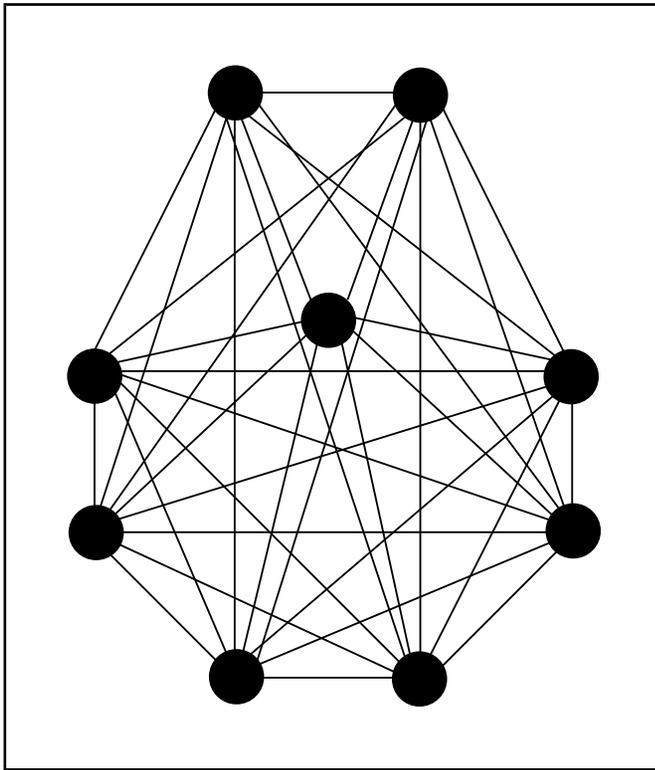
(a) $d(G) = \frac{92}{15} < 12 = 4 \times 3$.



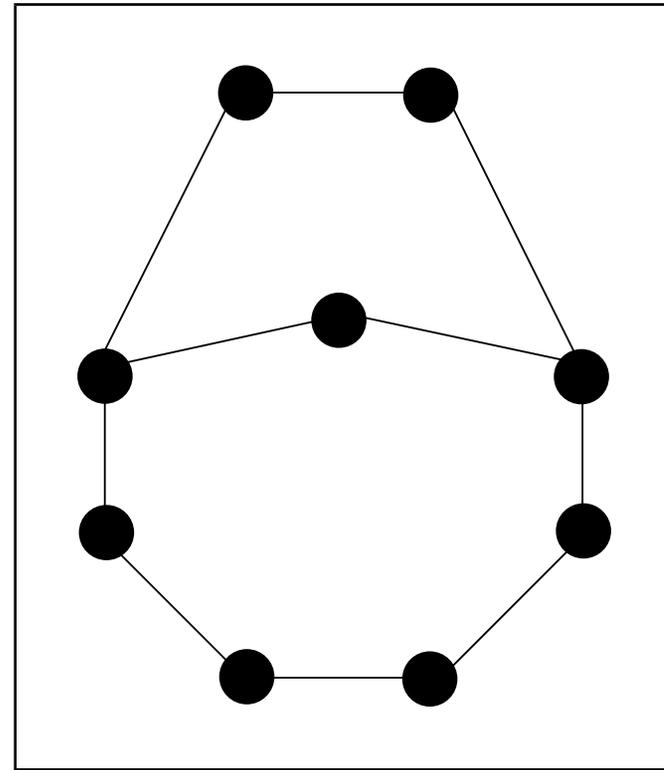
(b) Subgrafo H tal que $k(H) = \lambda(H) = 3$.

Figure 4: Grafo G que NO satisface la condición $d(G) \geq 4 \times 3$.

Conectividad.



(a) $d(G) = 8 = 4 \times 2$.



(b) Subgrafo H tal que $k(H) = \lambda(H) = 2$.

Figure 5: Grafo G que satisface la condición $d(G) = 4 \times 2$.

Conectividad.

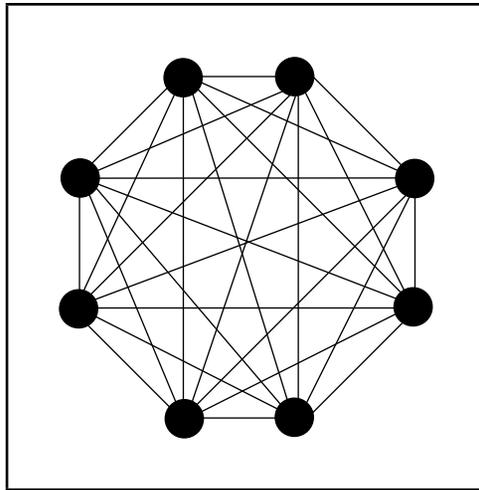
Definición: Llamaremos árbol a un grafo acíclico conexo.

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que un subgrafo $H \subseteq G$ es un árbol de cubrimiento de G si es un árbol y además $V(H) = V$.

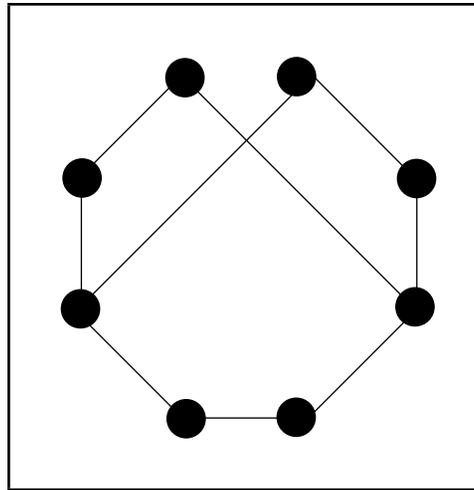
- ⇒ UNA TOPOLOGÍA DE ÁRBOL ES UNA BUENA OPCIÓN PARA EL DISEÑO DE UNA RED SI LO QUE BUSCAMOS ES CONECTAR UN CONJUNTO DE SITIOS A COSTO MÍNIMO SIN EXIGENCIAS DE ROBUSTEZ ANTE RUPTURAS EN LINKS O NODOS.

- ⇒ TAMBIÉN ES UNA BUENA OPCIÓN CUANDO LAS COMPONENTES FÍSICAS QUE INTEGRARÁN LA RED POSEEN NIVELES ALTOS DE CONFIABILIDAD (BAJA PROBABILIDAD DE FALLA).

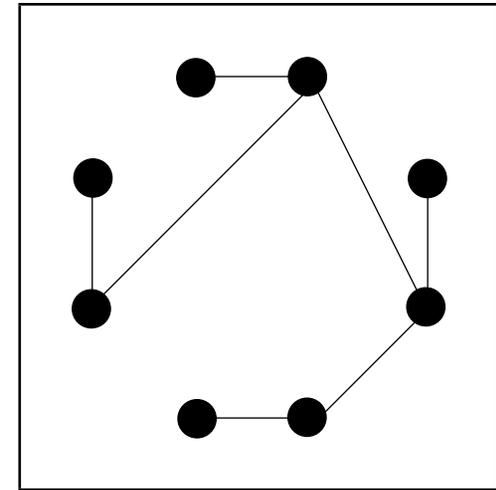
Conectividad.



(a) Grafo K^8 .



(b) Subgrafo 2-nodo-conexo.



(c) Árbol de cubrimiento.

Figure 6: Subgrafos de cubrimiento con topologías 2-conexa y de árbol.

⇒ AL ELIMINAR UNA ARISTA O UN NODO DE (b) EL GRAFO RESULTANTE SE MANTIENE CONEXO.

⇒ AL ELIMINAR UNA ARISTA O UN NODO DE GRADO 2 DE (c) EL GRAFO RESULTANTE ES DESCONEXO.

Conectividad.

Teorema 3: *Las siguientes aseercciones son equivalentes para un grafo T :*

- i) T es un árbol;*
- ii) dos nodos cualesquiera de T están comunicados por un único camino;*
- iii) T es conexo minimal, i.e. T es conexo pero $T \setminus e$ es desconexo para toda arista $e \in T$;*
- iv) T es acíclico maximal, i.e. T no contiene ciclos pero $T \cup \{(x, y)\}$ tiene un ciclo, para cualquier par de nodos no adyacentes $x, y \in T$.*

Corolario 1: *Un grafo conexo con n nodos es un árbol sii tiene $n - 1$ aristas.*

Conectividad.

Dado un grafo $G = (V, E)$ modelando las conexiones factibles entre diferentes sitios y una matriz de costos positivos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j) \in E}$ asociados a las aristas del grafo; los objetivos:

I) establecer una red conexa a costo mínimo.

II) establecer una red lo más robusta posible (i.e. resistente a fallas en nodos como en arcos).

son contrapuestos.

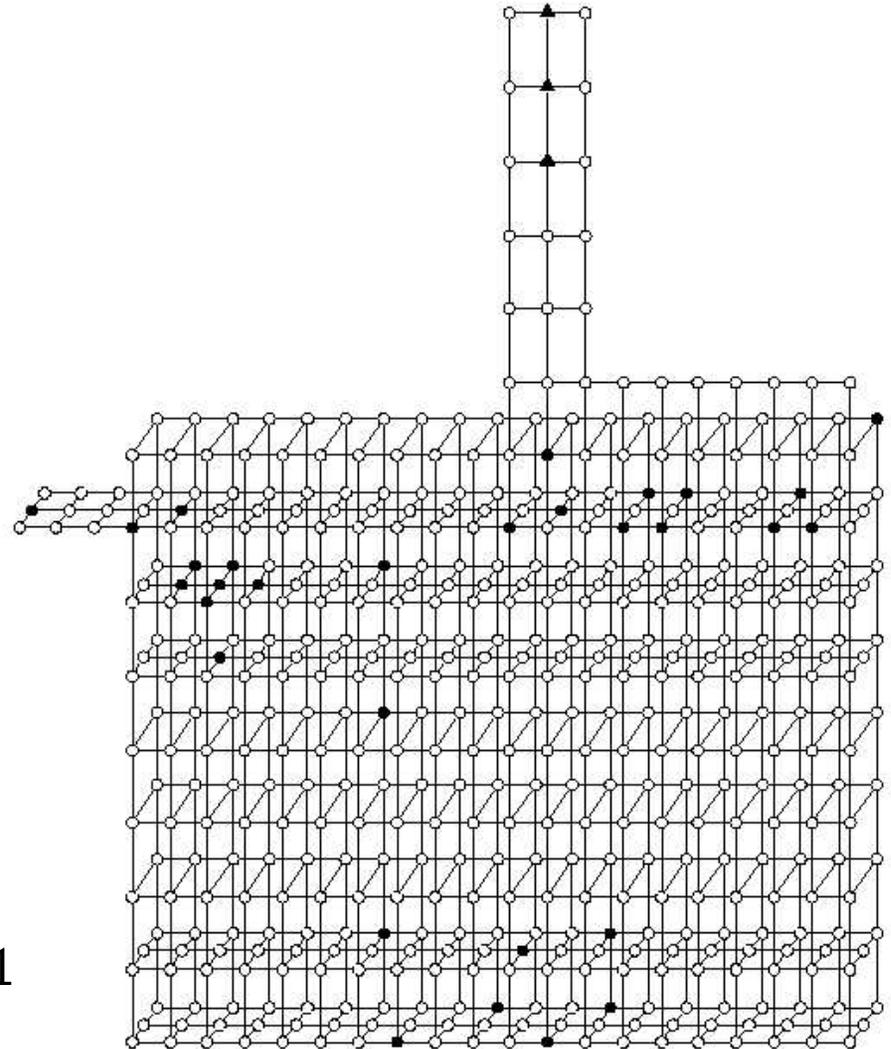
\Rightarrow USUALMENTE SE FIJA UN NIVEL k DE NODO-CONNECTIVIDAD O ARISTA-CONNECTIVIDAD Y LUEGO SE TRATA DE ENCONTRAR UNA TOPOLOGÍA DE COSTO MÍNIMO QUE SATISFAGA EL NIVEL DE CONEXIDAD DEMANDADO.

Conectividad.

- TÍPICAMENTE, EN EL DISEÑO DE UN *Backbone* DE FIBRA ÓPTICA, DADA LA CONFIABILIDAD DE SUS COMPONENTES, EN GENERAL UN NIVEL DE 2-NODO-CONECTIVIDAD ES SUFICIENTE PARA ALCANZAR NIVELES ALTOS DE ROBUSTEZ ANTE FALLAS EN LINKS O NODOS.
- TAMBIÉN SON MUY UTILIZADOS MODELOS CON REQUERIMIENTOS DE 2-ARISTA-CONECTIVIDAD ENTRE PARES DE NODOS DE LA RED.
- NIVELES DE NODO-CONECTIVIDAD (O ARISTA-CONECTIVIDAD) MAYORES QUE 2 SE HAN UTILIZADO EN APLICACIONES MILITARES; E.G. DISEÑO DEL KERNEL DE FIBRA ÓPTICA DE LA RED DE COMUNICACIONES DE UN PORTAAVIONES.

Conectividad.

- SEGUIDAMENTE VEREMOS LA DESCOMPOSICIÓN TOPOLÓGICA DE LOS GRAFOS 2-NODO-CONEXOS EN $H - paths$ Y DIFERENTES RESULTADOS ESTRUCTURALES INHERENTES A LOS MISMOS.



31

Conectividad.

Teorema 4: *Un grafo es 2-nodo-conexo sii este puede ser construido a partir de un ciclo mediante sucesivas agregaciones de H – paths a grafos H ya construidos.*

Dem. (\Leftarrow) Trivial. (\Rightarrow) Sea G un grafo 2-nodo-conexo. Entonces G contiene un ciclo y por lo tanto tiene un subgrafo maximal H construido según el proceso descrito. Dado que cualquier arista $xy \in E(G) \setminus E(H)$ con $x, y \in H$ definiría un H – path, H es un subgrafo inducido de G . Así, si $H \neq G$, entonces por la conectividad de G hay una arista (v, w) con $v \in G \setminus H$ y $w \in H$. Como G es 2-nodo-conexo, $G \setminus w$ contiene un v – H path P . Entonces el camino wvP es un H – path en G y $H \cup wvP$ es un subgrafo construible a partir de G y es más grande que H . Esto contradice la maximalidad de H .

QED

Conectividad.

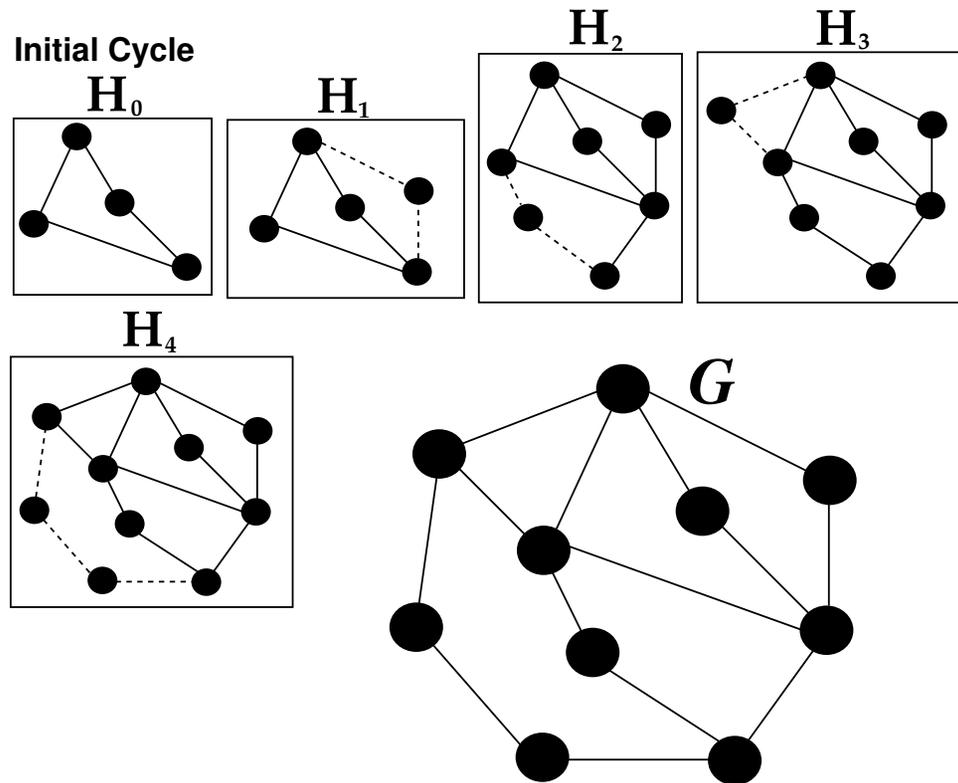


Figure 7: Ejemplo de descomposición en H -Paths.

Conectividad.

⇒ ESTE MISMO RESULTADO DE CARACTERIZACIÓN DE LOS GRAFOS 2-CONEXOS TAMBIÉN FUE DEMOSTRADO POR FREDERICKSON-JÁJÁ (1981) UTILIZANDO INDUCCIÓN EN EL NÚMERO DE CICLOS DEL GRAFO EN CUESTIÓN. EL SIGUIENTE ES EL ENUNCIADO DEL LEMA DE DESCOMPOSICIÓN DE FREDERICKSON-JÁJÁ Y SU RESPECTIVA DEMOSTRACIÓN.

Lema 1 (Descomposición, Frederickson-Jájá 1981): *Sea $G' = (V, E')$ un grafo 2-conexo con más de un ciclo. Entonces hay un camino compuesto de aristas $E_p = \{(v_1, v_2), \dots, (v_{r-1}, v_r)\} \subset E'$ tal que $v_1 \neq v_r$, cada nodo de $V_p = \{v_2, \dots, v_{r-1}\}$ tiene grado 2 en G' , v_1 y v_r tienen grado mayor a 2 en G' , y $G_p = (V \setminus V_p, E' \setminus E_p)$ es 2-conexo.*

Dem. Por inducción en nc , el número de ciclos de G' .

PASO BASE: $nc = 3$. Todos los nodos serán de grado 2, excepto por dos nodos de grado 3, que asumiremos son v_1 y v_r . Sea E_p el conjunto de aristas presentes en un camino simple entre v_1 y v_r . El grafo “restante” $G_p = (V \setminus V_p, E \setminus E_p)$ será un ciclo y por lo tanto 2-conexo.

PASO INDUCTIVO: $nc > 3$. Consideremos un grafo 2-conexo G' con nc ciclos y asumamos que el Lema se satisface para grafos 2-conexos con menos de nc ciclos. Elegimos dos nodos v_1 y v_r y aristas E_t formando un camino satisfaciendo todas las condiciones excepto que posiblemente $G_t = (V \setminus V_t, E \setminus E_t)$ no sea 2-conexo. Si G_t es 2-conexo, entonces tomamos E_p igual a E_t y no hay nada que demostrar.

Si G_t no es 2-conexo, entonces identificamos un conjunto de aristas E_c tal que $E_t \subset E_c$. Identificamos además bloques (i.e. subgrafos 2-conexos maximales) no triviales de G_t . Debe de haber por lo menos uno, sino G' no tiene más de un ciclo. Elegimos el bloque no trivial $G_b = (V_b, E_b)$ con la menor cantidad posible de ciclos \bar{nc} . Si $\bar{nc} = 1$, consideremos entonces $E_p = E_b \cap E_c$. No es difícil verificar que eliminando la intersección de los

ciclos E_b y E_c surge el grafo G_p 2-conexo. Si $\bar{n}c > 1$, entonces por hipótesis inductiva, hay un conjunto de aristas $E_q \subset E_b$ formando un camino tal que $(V_b \setminus V_q, E_b \setminus E_q)$ es 2-conexo. Si $E_q \cap E_c = \emptyset$, sea $E_p = E_q$; sino sea $E_p = E_q \cap E_c$. Nuevamente, no es difícil verificar que $(V \setminus V_p, E \setminus E_p)$ es 2-conexo.

QED

Conectividad.

Lema 2 (Berge 1973): *Las siguientes aseercciones son equivalentes para un grafo conexo $G = (V, E)$:*

- a) G es 2-nodo-conexo.*
- b) dos nodos cualquiera de G se hayan en un ciclo común.*
- c) dos aristas cualquiera de G se hayan en un ciclo común.*
- d) una arista cualquiera y un nodo cualquiera de G se hayan en un ciclo común.*

Dem. Demostraremos el Lema siguiendo este orden para la pruebas:

$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

CASO (a) \Rightarrow (b). Sean $v_1, v_2 \in V$ dos nodos cualesquiera. Supongamos que no existen dos caminos independientes $p_1, p_2 \subseteq G$ con extremos v_1 y v_2 . Entonces, necesariamente, G tiene al menos un punto de articulación $w \in V$, i.e. $G \setminus w$ es desconexo. Esto contradice la 2-nodo-conexidad de G .

CASO (b) \Rightarrow (c). Sean $e_1, e_2 \in E$ dos aristas cualesquiera. Sea $e_1 = (x, y)$ y $e_2 = (z, w)$. Sin perder generalidad supondremos x, y, z, w distintos. Por hipótesis sabemos que existe un ciclo C_1 conteniendo x y z y otro ciclo C_2 conteniendo y y w . El ciclo C_1 está formado por dos caminos independientes p_1 y p_2 con extremos x y z , asimismo C_2 está formado por dos caminos independientes q_1 y q_2 con extremos y y w . Analizemos los siguientes casos:

Sub-Caso b.1. $e_1, e_2 \notin C_1, e_1, e_2 \notin C_2$. Claramente $C = e_1 p_1 e_2 q_1$ es un ciclo conteniendo e_1 y e_2 .

Sub-Caso b.2. $e_1 \in p_2, e_1 \notin C_2, e_2 \notin C_1, e_2 \notin C_2$. Claramente $C = e_1 p_1 e_2 q_1$ es un ciclo conteniendo e_1 y e_2 .

Sub-Caso b.3. $e_1 \in p_2$, $e_1 \notin C_2$, $e_2 \notin C_1$, $e_2 \in q_1$. Claramente $C = e_1 p_1 e_2 q_2$ es un ciclo conteniendo e_1 y e_2 .

El resto de los casos son simétricos.

CASO (c) \Rightarrow (d). Sea $e = (x, y) \in E$ y $v \in V$ una arista y un nodo de G . Como G es conexo existe un nodo w adyacente a v en G . Considerando las aristas e y (v, w) , sabemos por hipótesis que existe un ciclo C que contiene ambas aristas y por lo tanto contiene a la arista e y al nodo v .

CASO (d) \Rightarrow (a). Supongamos que G no es 2-nodo-conexo, entonces existe $v \in V$ tal que $G \setminus v$ es desconexo. Sean C_1 y C_2 dos componentes conexas resultantes de eliminar v en G . Sea u un nodo de C_1 adyacente a v en G y sea w un nodo cualquiera de C_2 . Por hipótesis, en G existe un ciclo conteniendo la arista (v, u) y al nodo w con lo cual u y w estarían conectados en $G \setminus v$. Esto contradice que C_1 y C_2 sean componentes disjuntas de $G \setminus v$.

QED

Conectividad.

Lema 3: *Sea $G = (V, E)$ un grafo 2-nodo-conexo (resp. 2-arista-conexo) con $G' = (V', E')$ un subgrafo de G inducido por V' . Entonces reemplazando E' en G por cualquier conjunto de aristas E'' definidas sobre V' , donde $G'' = (V', E'')$ es 2-nodo-conexo (resp. 2-arista-conexo), resulta en un grafo $G^* = (V, (E \setminus E') \cup E'')$ el cual es 2-nodo-conexo (resp. 2-arista-conexo).*

Dem. Supongamos que G^* no es 2-nodo-conexo y sea v un punto de articulación. Como G es 2-nodo-conexo, cada componente conexa de $G^*(V \setminus v)$ debe contener un nodo de V' . Como G'' es 2-nodo-conexo, podemos encontrar un camino en G^* el cual evita v entre estos nodos en cualquiera dos de estas componentes. Esto contradice que v sea un punto de articulación.

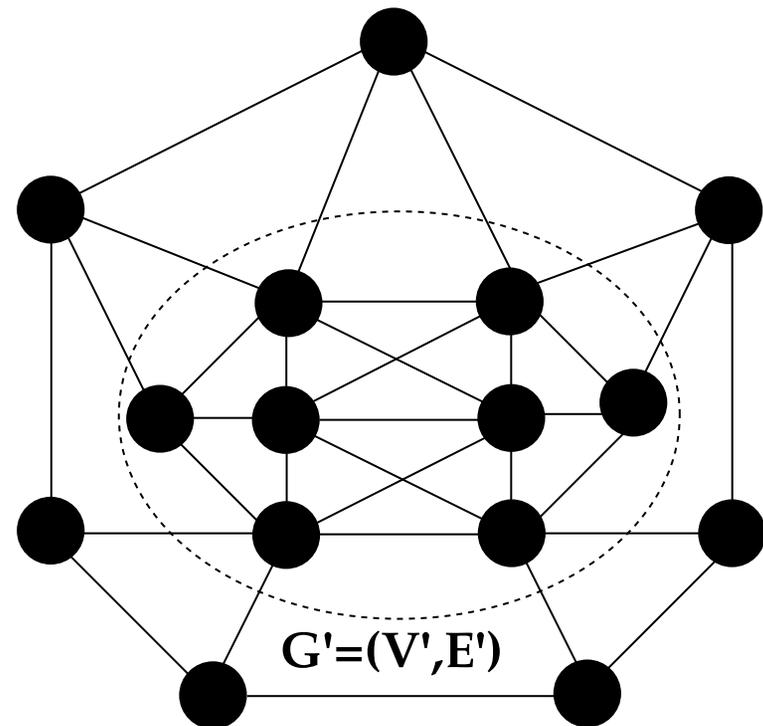
QED

Conectividad.

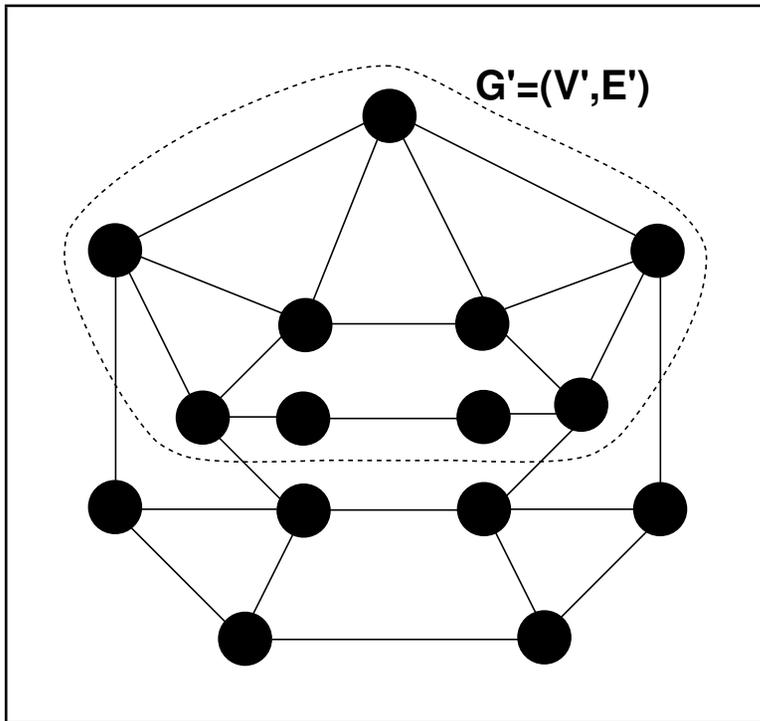
⇒ EL LEMA ANTERIOR ES MUY UTILIZADO EN DIFERENTES ALGORITMOS APROXIMADOS QUE DISEÑAN REDES 2-CONEXAS; EN PARTICULAR PARA ENCONTRAR NUEVAS SOLUCIONES FACTIBLES A PARTIR DE UNA GRAN VARIEDAD DE CAMBIOS QUE PRESERVAN LA 2-CONEXIDAD.

Sea $G = (V, E)$ el siguiente grafo; queremos encontrar un subgrafo

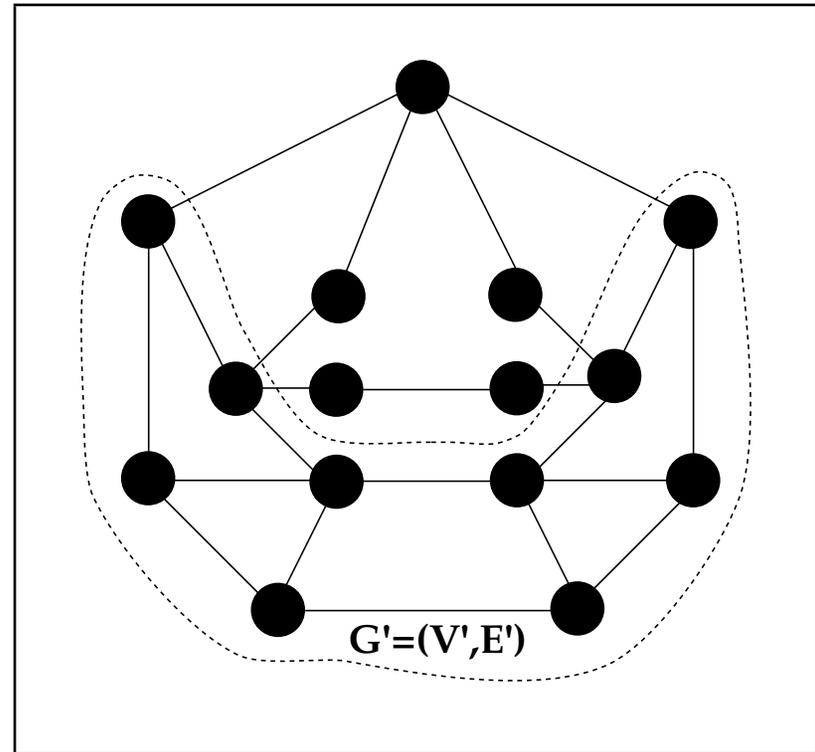
2-nodo-conexo minimal que cubra V .



Conectividad.



(a) G' será sustituido por un subgrafo 2-nodo-conexo.

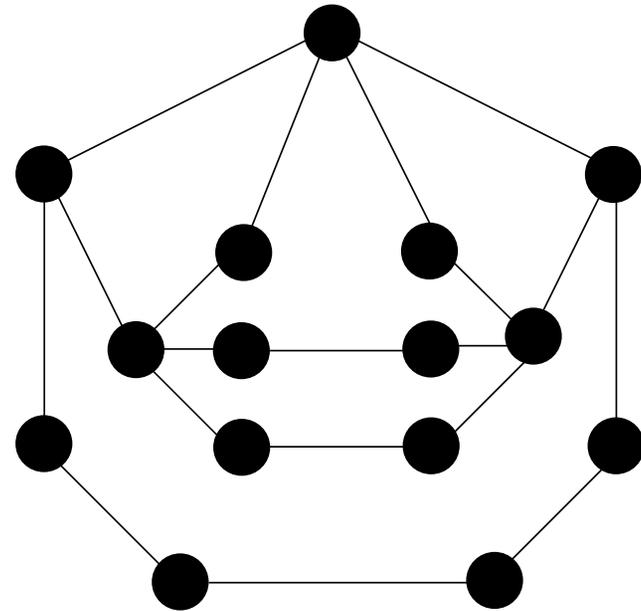
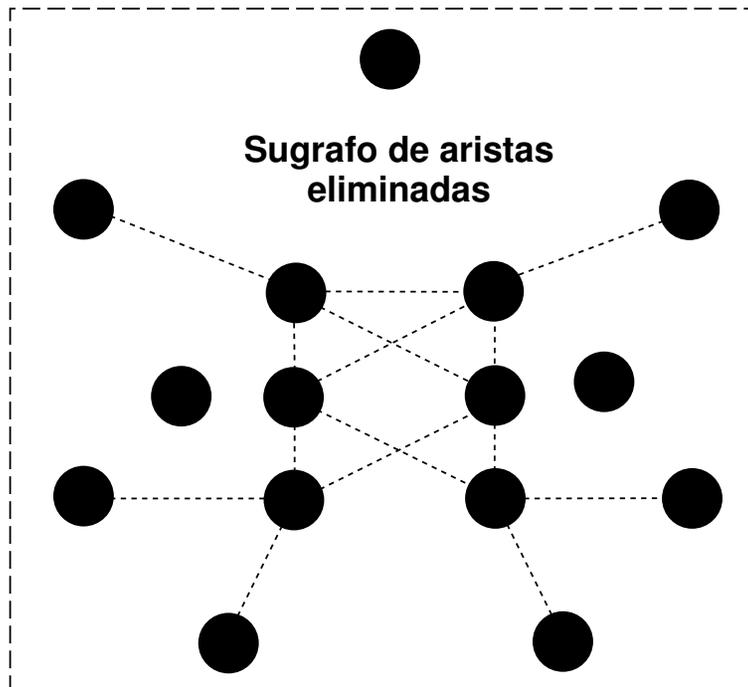


(b) G' será sustituido por un subgrafo 2-nodo-conexo.

Figure 8: Sustitución de subgrafos inducidos por sugrafos 2-nodo-conexos.

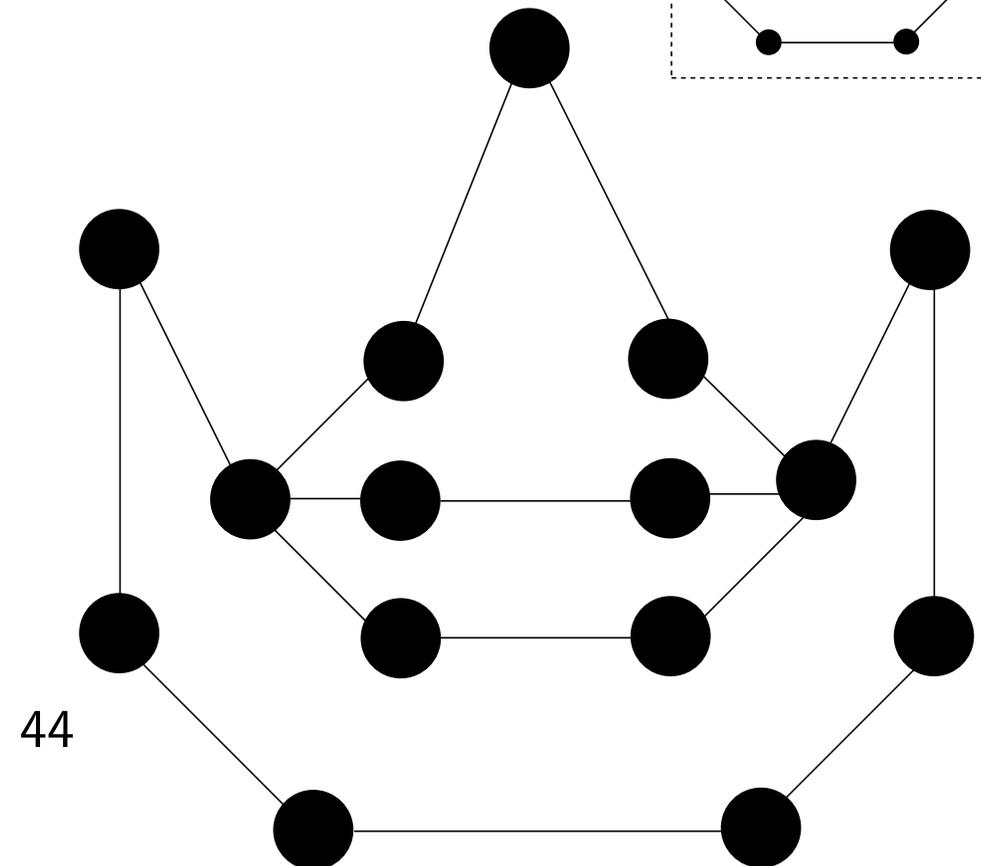
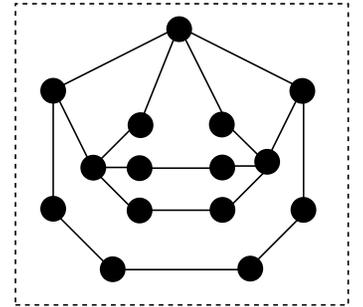
Conectividad.

⇒ COMO RESULTADO DE LA SUSTITUCIÓN EN G DE SUBGRAFOS INDUCIDOS POR SUBGRAFOS 2-NODO-CONEXOS MINIMALES OBTENEMOS LA SIGUIENTE TOPOLOGÍA 2-NODO-CONEXA:



Conectividad.

⇒ ELIMINANDO DOS ARISTAS
REDUNDANTES OBTENEMOS:



Conectividad.

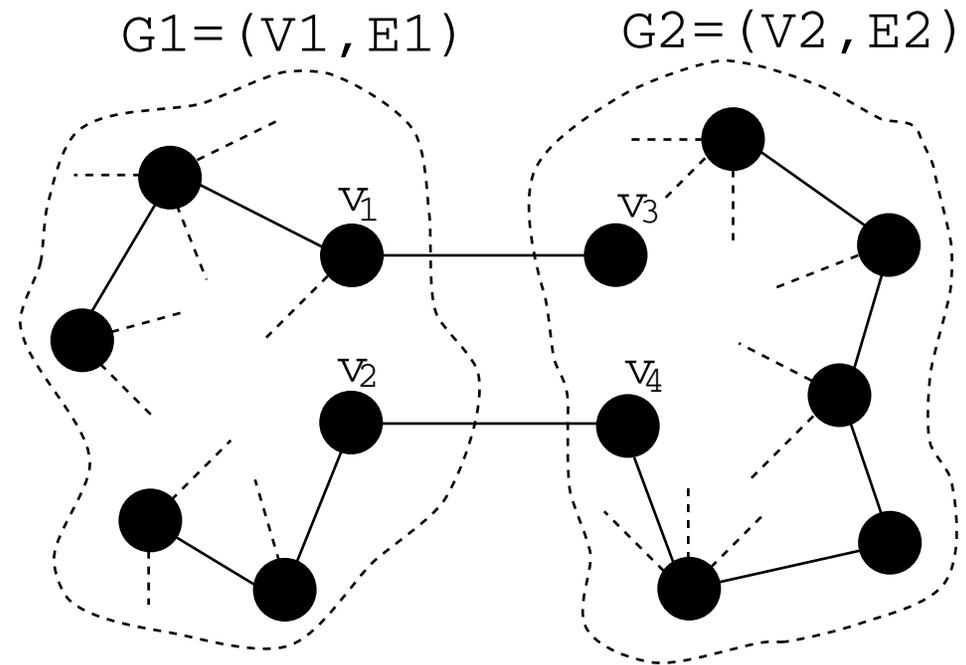
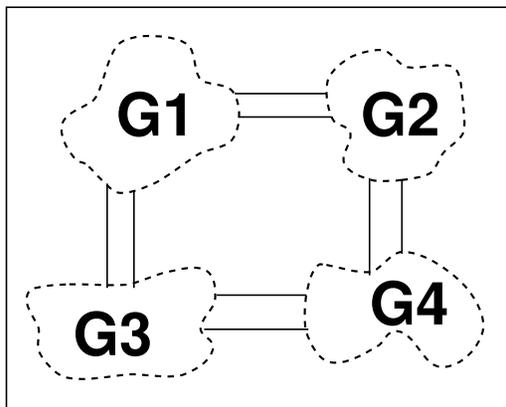
Proposición 2: Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos 2-nodo-conexos con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sean $v_1, v_2 \in V_1$ y $v_3, v_4 \in V_2$. Entonces el grafo $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{(v_1, v_3), (v_2, v_4)\})$ es también es 2-nodo-conexo.

Dem. Veremos que G no tiene punto de articulación. Sea v un nodo de V_1 . Entonces si removemos v de G , todavía hay un camino entre cualquier par de nodos de V_1 puesto que G_1 es 2-nodo-conexo. Si tomamos dos nodos de V_2 existe un camino entre ellos que está completamente contenido en G_2 . El otro caso es cuando tenemos un nodo $u \in V_1$ y un nodo $w \in V_2$. Supongamos que $v \neq v_1, v_3$. Entonces hay un camino p_1 desde u a v_1 que no atraviesa v y un camino p_2 desde v_3 a w . Entonces el camino $p_1 - (v_1, v_3) - p_2$ conecta u y w . Si $v = v_1$ o $v = v_3$, usamos v_2 y v_4 .

QED

Conectividad.

⇒ EL RESULTADO ANTERIOR NOS PERMITE INTERCONECTAR COMPONENTES 2-NODO-CONEXAS (QUE MODELAN EL KERNEL DE DIFERENTES REDES) DE FORMA QUE LA RED RESULTANTE TAMBIÉN SEA 2-NODO-CONEXA.



Conectividad.

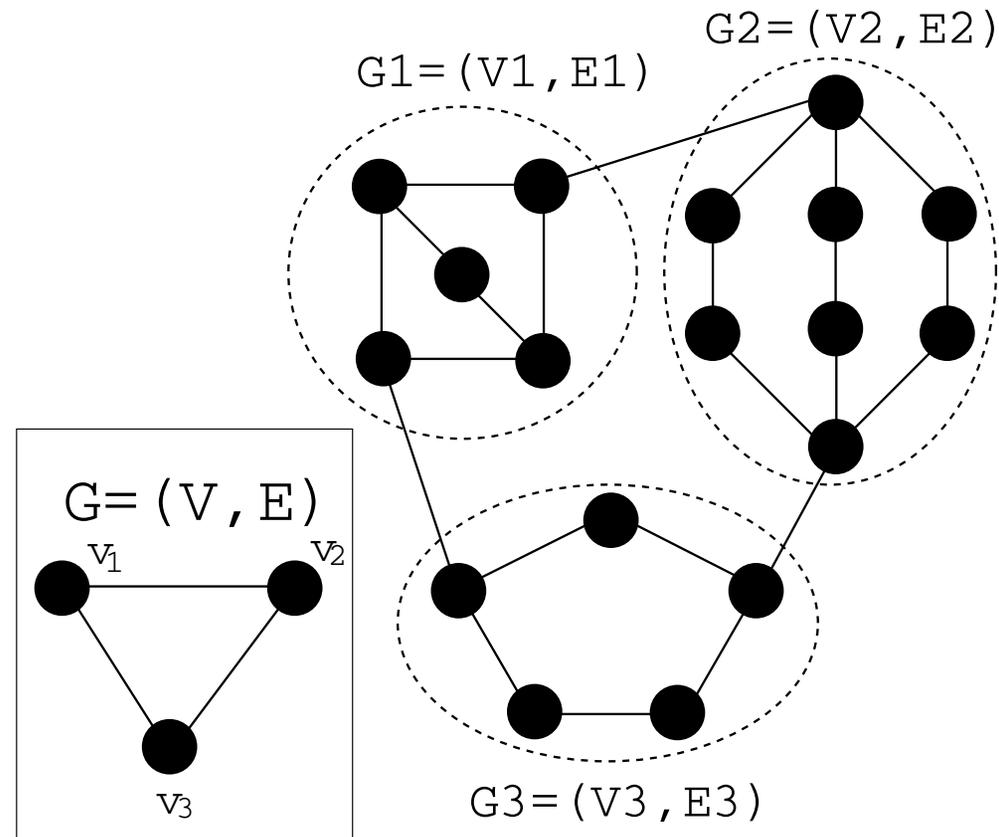
Proposición 3: *Sea $G = (V, E)$ un grafo 2-nodo-conexo con $n = |V| > 2$. Supongamos que cada nodo $v_i \in V$ es reemplazado por un grafo 2-nodo-conexo $G_i = (V_i, E_i)$. Supongamos que cada arista $e = (u, w) \in E$ es reemplazada por una arista e' desde $u' \in G_u$ a $w' \in G_w$. Entonces si cualesquiera dos de estas aristas no tienen un nodo en común, el grafo $H = (\bigcup_i V_i, \bigcup_i E_i \cup E')$ es 2-nodo-conexo.*

Dem. La demostración se centra en ver que en H no existen puntos de articulación. Claramente ningún nodo que no sea extremo de una arista de E' puede ser punto de articulación. Por otro lado, tampoco los nodos extremos de las aristas de reemplazo de E' pueden ser puntos de articulación puesto que cada G_i tiene al menos 2 nodos que son extremos de aristas de E' . Esto concluye la demostración.

QED

Conectividad.

⇒ EL RESULTADO PREVIO
PERMITE MODELAR UNA RED
2-NODO-CONEXA EN DOS
NIVELES; UN NIVEL DE
INTERCONEXIÓN ENTRE
SUB-REDES (CON ESTRUCTURA
TOPOLOGÍA 2-NODO-CONEXA)
Y LAS SUB-REDES PROPIAMENTE
DICHAS QUE TAMBIÉN SON
2-NODO-CONEXAS.



Conectividad.

Proposición 4: *Sea $G = (V, E)$ un grafo 2-nodo-conexo que no es un triángulo. Sea $e \in E$ una arista cualquiera. Entonces $G \setminus e$ es 2-nodo-conexo o bien G/e es 2-nodo-conexo.*

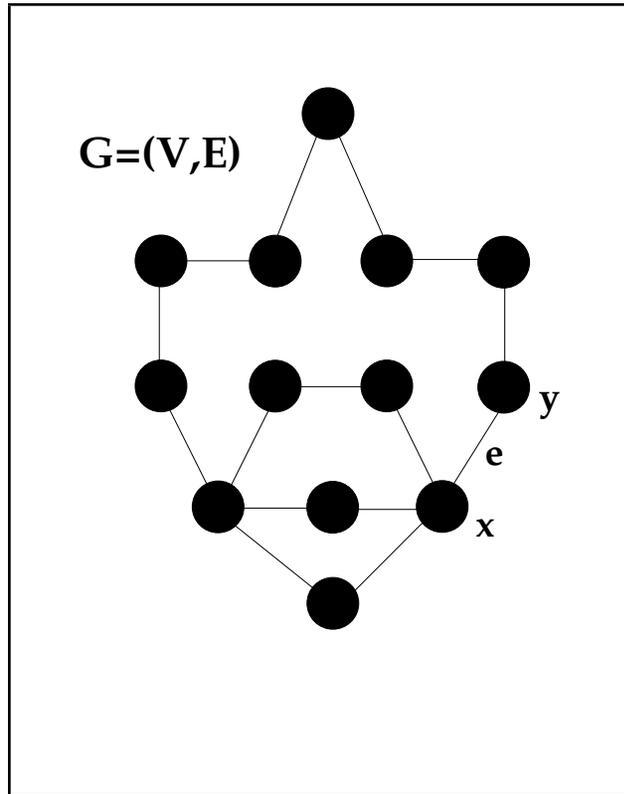
Dem. Sea $e = (x, y) \in E$ una arista cualquiera con extremos $x, y \in V$. Si $G \setminus e$ es 2-nodo-conexo entonces no hay nada que demostrar. Veamos ahora el caso en que $G \setminus e$ no es 2-nodo-conexo. Sea $e' = (u, z) \in E$ con $e' \neq e$ y $v \in V$ un nodo cualquiera. Por Lema de Berge, existe en G un ciclo C que contiene a e' y a v . Si $e \notin C$ entonces el ciclo C también está en G/e . Si $e \in C$ analizaremos los siguientes casos:
CASO A: C no es un triángulo. En este caso claramente existe en G/e un ciclo que contiene al nodo v (o v_{xy} en caso que $v \in \{x, y\}$) y a la arista e' .
CASO B: C es un triángulo. Supongamos que $z = y$ y $v = x$, o sea $C = (u, x) - (x, y) - (y, u)$. Como G no es un triángulo existe $k \in V$, $k \neq x, y$ adyacente a u en G . Por Lema de Berge, dado que G es

2-nodo-conexo existe en G un ciclo que contiene a las aristas (u, k) y (x, y) , con lo cual existe un ciclo en G/e que contiene a la arista (u, k) y al nodo contraído v_{xy} .

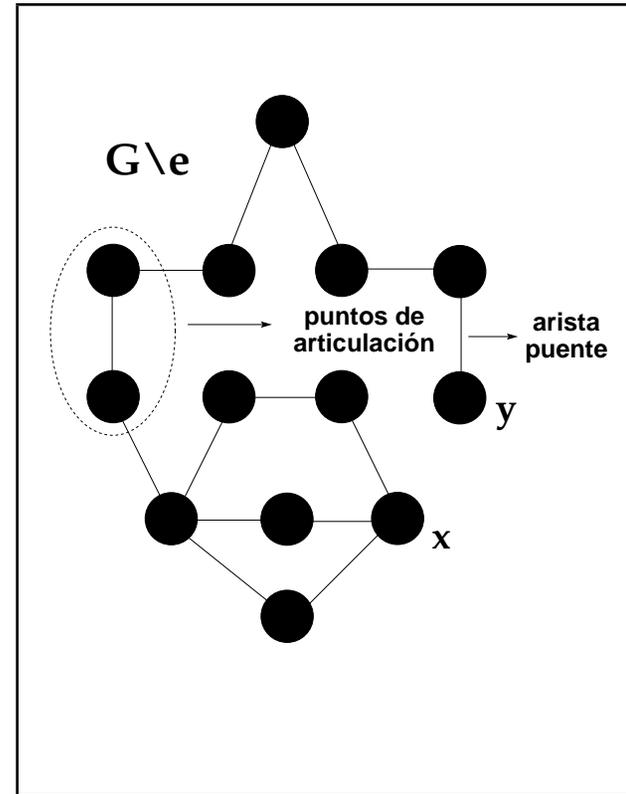
Hemos probado que dada cualquier arista de G/e y cualquier nodo de G/e existe un ciclo en G/e que los contiene, entonces por Lema de Berge G/e es 2-nodo-conexo.

QED

Conectividad.



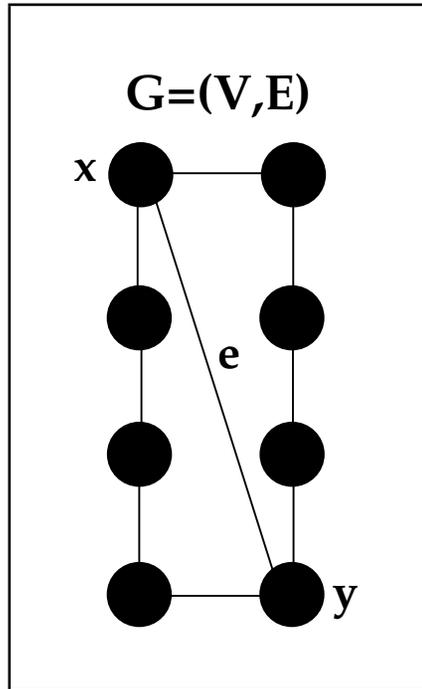
(a) Grafo G 2-nodo-conexo minimal.



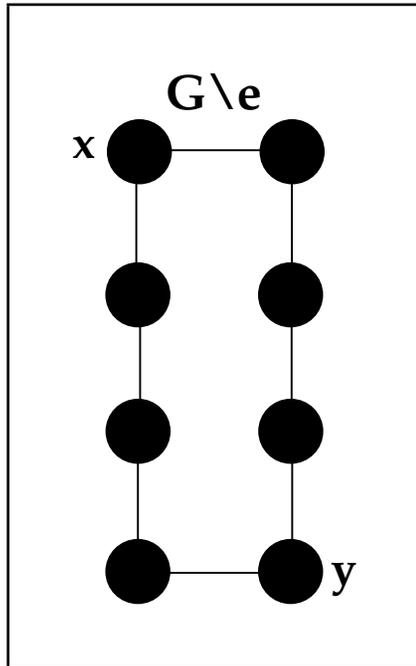
(b) Grafo $G \setminus e$ 1-nodo-conexo.

Figure 9: La red $G \setminus e$ no es 2-nodo-conexa pues G es 2-conexa minimal.

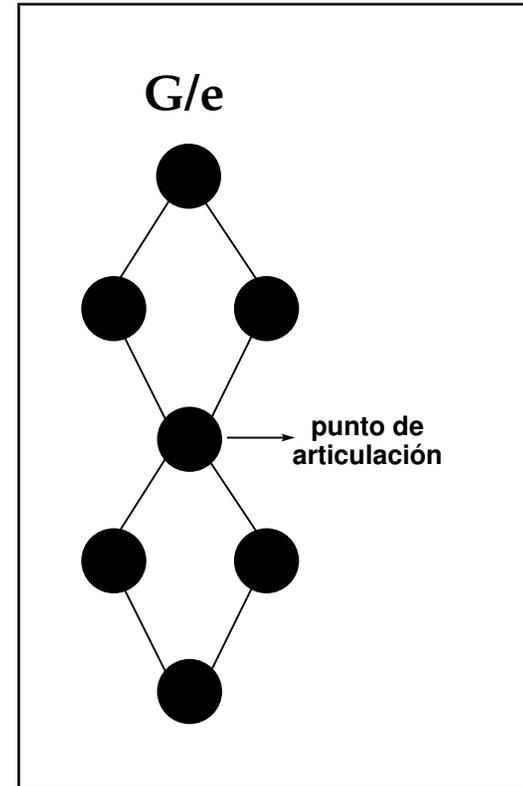
Conectividad.



(a) G es 2-nodo-conexo no minimal.



(b) $G \setminus e$ es 2-nodo-conexo minimal.



(c) G/e es 1-nodo-conexo.

Figure 10: Ejemplo donde G es 2-nodo-conexo no minimal.

Conectividad.

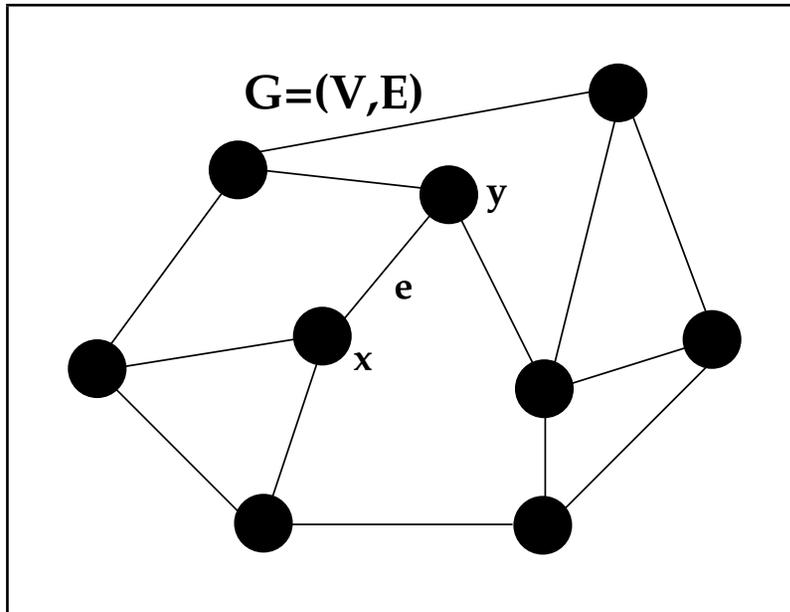
Lema 4: *Si G es 3-nodo-conexo y $|G| > 4$, entonces G tiene una arista e tal que G/e es también 3-nodo-conexo.*

Dem. Supongamos que no hay ninguna arista e de G en estas condiciones. Entonces, para cada arista $(x, y) \in G$ el grafo $G/(x, y)$ contiene un conjunto separador S con a lo sumo 2 nodos. Dado que $k(G) \geq 3$, el nodo contraído v_{xy} de $G/(x, y)$ se haya en S y $|S| = 2$, i.e. G tiene un nodo $z \notin \{x, y\}$ tal que $\{v_{xy}, z\}$ es un conjunto separador en $G/(x, y)$. Entonces, dos nodos cualesquiera separados por $\{v_{xy}, z\}$ en $G/(x, y)$ están separados en G por el conjunto $T = \{x, y, z\}$. Dado que ningún subconjunto propio de T es separador en G , cada nodo en T tiene un vecino en cada componente C de $G \setminus T$. Elegimos la arista (x, y) , el nodo z y la componente C tal que $|C|$ es mínimo, y escogemos un vecino v de z en C . Por asunción, $G/(z, v)$ también no es 3-nodo-conexo, de este modo nuevamente hay un nodo w

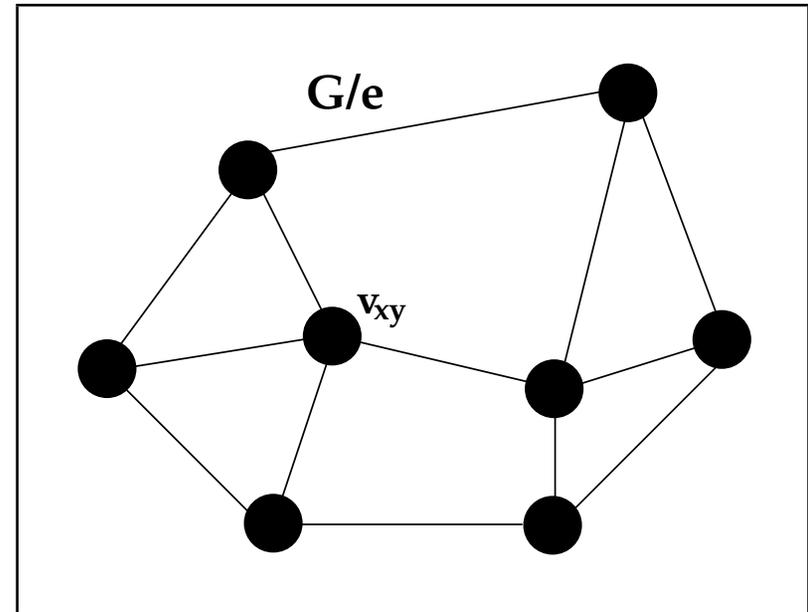
tal que $\{z, v, w\}$ es un conjunto separador de G , y como antes cada nodo en $\{z, v, w\}$ tiene un vecino en cada componente de $G \setminus \{z, v, w\}$. Como x e y son adyacentes, $G \setminus \{z, v, w\}$ tiene una componente D tal que $D \cap \{x, y\} = \emptyset$. Entonces cada vecino de v en D yace en C (puesto que $v \in C$), así $D \cap C \neq \emptyset$ y por lo tanto $D \subset C$ por la elección de D . Esto contradice la elección de (x, y) , z y C .

QED

Conectividad.



(a) G es 3-nodo-conexo minimal.



(b) G/e es 3-nodo-conexo minimal.

Figure 11: Ejemplo donde G es 3-nodo-conexo y G/e es 3-nodo-conexo.

Conectividad.

Teorema 5 (Tutte 1961): *Un grafo G es 3-nodo-conexo sii existe una secuencia de grafos G_0, G_1, \dots, G_n con las siguientes propiedades:*

i) $G_0 = K^4$ y $G_n = G$;

ii) G_{i+1} tiene una arista (x, y) con $d(x), d(y) \geq 3$ y $G_i = G_{i+1}/(x, y)$, para cada $i < n$.

Dem. (\Rightarrow) Si G es 3-nodo-conexo, por Lema 4, existe una secuencia como la del Teorema. Notar que todos los grafos de la secuencia son 3-nodo-conexos.

(\Leftarrow) Inversamente, sea G_0, \dots, G_n una secuencia de grafos en las condiciones (i) y (ii) del teorema, veremos que si $G_i = G_{i+1}/(x, y)$ es 3-nodo-conexo entonces G_{i+1} también lo es, para todo $i < n$.

Supongamos que G_{i+1} no es 3-nodo-conexo; sea S un conjunto separador de a lo sumo 2 nodos en G_{i+1} y sean C_1 y C_2 dos componentes de $G_{i+1} \setminus S$. Como x e y son adyacentes, podemos asumir que $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$. Analicemos los siguientes casos:

Caso A: $x, y \in C_2$. Así, el nodo contraído v_{xy} estaría separado de C_1 en G_i por a lo sumo dos nodos. Esto contradice la 3-conexidad de G_i .

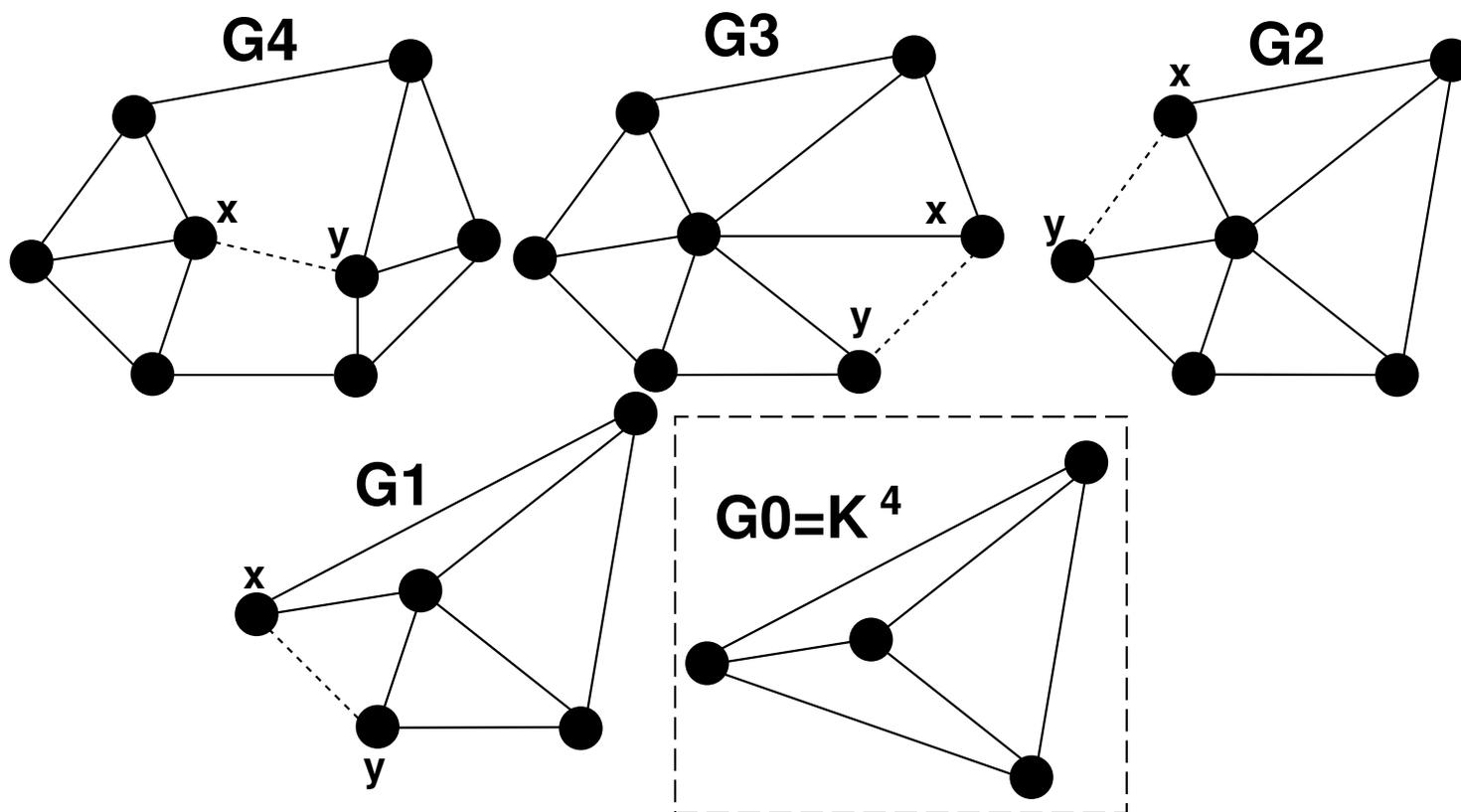
Caso B: $x, y \notin C_2$, existe $v \in C_2$ con $v \neq x, y$. En este caso el nodo v estaría separado de C_1 en G_i por a lo sumo dos nodos. Esto contradice la 3-conexidad de G_i .

Caso C: $x \in C_2, y \notin C_2$. Como $d(x) \geq 3$ en G_{i+1} , existe $w \in V$, $w \neq x, y$, adyacente a x en G_i tal que $w \notin S$. Necesariamente $w \in C_2$. Entonces w estaría separado de C_1 en G_i por a lo sumo 2 nodos. Esto contradice la 3-conexidad de G_i .

De (A), (B), y (C) tenemos que G_{i+1} es 3-nodo-conexo.

QED

Conectividad.



TEOREMA DE TUTTE APLICADO AL GRAFO DE FIGURA 11.

Conectividad.

Proposición 4: *Sea $G = (V, E)$ un grafo 3-arista-conexo que además es cúbico, i.e. $d(v) = 3, \forall v \in V$, entonces G es 3-nodo-conexo.*

Dem. Supongamos que G no es 3-nodo-conexo. Entonces existen dos nodos $u, v \in V$ tal que en G no hay 3 caminos nodo-disjuntos conectándolos. Dado que G es 3-arista-conexo existen tres caminos arista-disjuntos $p_1, p_2, p_3 \subseteq G$ comunicando u y v en G . Éstos no pueden ser independientes, por lo tanto al menos dos de ellos comparten algún nodo. Sin perder generalidad supongamos que existe $w \in p_1 \cap p_2$. Pero entonces $d(w) \geq 4$, lo cuál contradice la hipótesis que G es cúbico.

QED

Conectividad.

Proposición 5: *Sea $G = (V, E)$ un grafo 3-nodo-conexo y $(x, y) \in E$ una arista de G . Entonces el grafo $G/(x, y)$ es 3-nodo-conexo sii $G \setminus \{x, y\}$ es 2-nodo-conexo.*

Dem. (\Rightarrow). Sabemos que G y $G/(x, y)$ son 3-nodo-conexos. Sea v_{xy} el nodo contraído de $G/(x, y)$. Denotemos los grafos $H = (G/(x, y)) \setminus \{v_{xy}\}$ y $\hat{G} = G \setminus \{x, y\}$. Es fácil ver que:

I) $V(H) = V(\hat{G})$ puesto que la arista (x, y) se corresponde al nodo v_{xy} en $G/(x, y)$ y los demás nodos no cambian.

II) $E(H) = E(\hat{G})$ puesto que las aristas de G que faltan en H son aquellas que tienen como uno de sus extremos a x o y .

De (I) y (II) tenemos que $H = \hat{G}$. Por otro lado, como $G/(x, y)$ es 3-nodo-conexo, tenemos que H es 2-nodo-conexo y por lo tanto \hat{G} es 2-nodo-conexo como queríamos probar.

(\Leftarrow). Sabemos que G es 3-nodo-conexo y $G \setminus \{x, y\}$ es 2-nodo-conexo. Sean $i, j \in V \setminus \{x, y\}$ dos nodos cualesquiera. Si para toda terna de caminos nodo-disjuntos que comunican i con j en G uno de ellos contiene a x y otro a y entonces claramente $G \setminus \{x, y\}$ no sería 2-nodo-conexo. Por ende, existen al menos dos caminos nodo-disjuntos en G que no contienen ni a x ni a y y comunican i con j . Sean $p_1, p_2, p_3 \subseteq G$ tres caminos nodo-disjuntos con extremos i y j tal que $x, y \notin p_1, p_2$. Tenemos que:

CASO A). Si $x, y \notin p_3$ entonces $p_1, p_2, p_3 \subset G/(x, y)$.

CASO B). Si x y/o y está en p_3 entonces existe en $G/(x, y)$ un camino \hat{p} nodo-disjunto con p_1 y p_2 conteniendo al nodo contraído v_{xy} .

De (A) y (B) tenemos que i y j son localmente 3-nodo-conexos en $G/(x, y)$ probando así la 3-nodo-conectividad de $G/(x, y)$.

QED

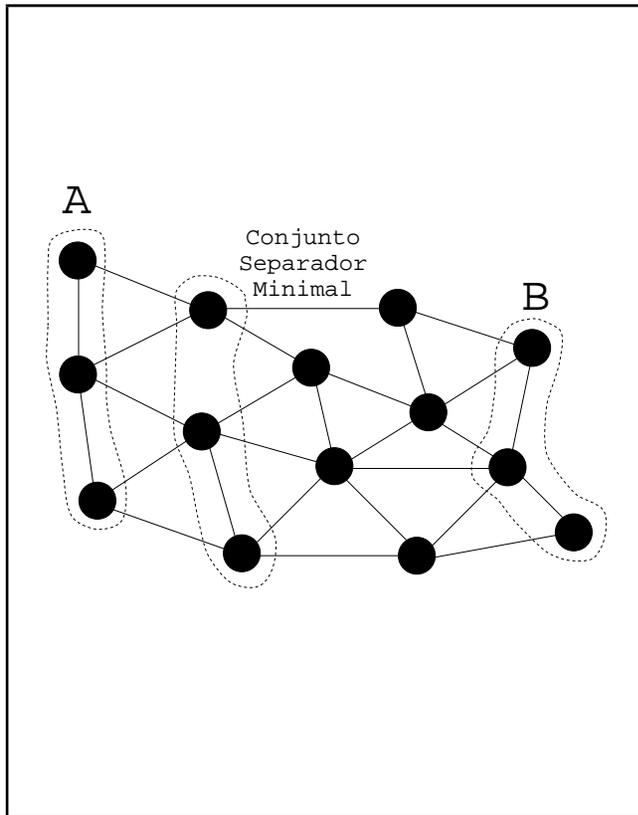
Conectividad.

⇒ UNO DE LOS RESULTADOS FUNDAMENTALES EN LA TEORÍA DE CONECTIVIDAD EN GRAFOS ES EL RESULTADO CONOCIDO COMO TEOREMA DE MENGER, EL CUAL ESTABLECE UNA RELACIÓN DIRECTA ENTRE CONJUNTOS SEPARADORES DE CARDINALIDAD MÍNIMA Y LA CANTIDAD MÁXIMA DE CAMINOS DISJUNTOS ENTRE DOS CONJUNTOS DE NODOS PREDETERMINADOS. PUNTUALMENTE:

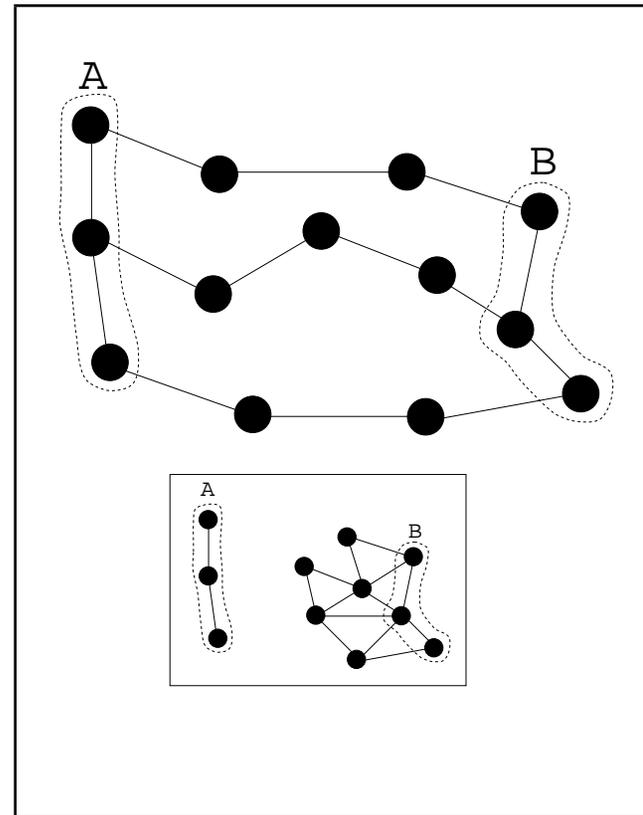
Teorema 6 (Menger 1927): *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $A, B \subseteq V$. Entonces el mínimo número de nodos separando A de B en G es igual al máximo número de caminos disjuntos de A a B en G .*

Para determinar la cantidad máxima de caminos nodo-disjuntos que conectan dos conjuntos de nodos de un grafo mediante un algoritmo de orden polinomial se determina el conjunto separador de cardinalidad mínima entre dichos conjuntos.

Conectividad.



(a) Grafo G y conjunto separador minimal.



(b) Tres caminos nodo-disjuntos entre A y B .

Figure 12: Ejemplo del Teorema de Menger.

Conectividad.

Corolario 2: Sean u y v dos nodos de $G = (V, E)$. Entonces:

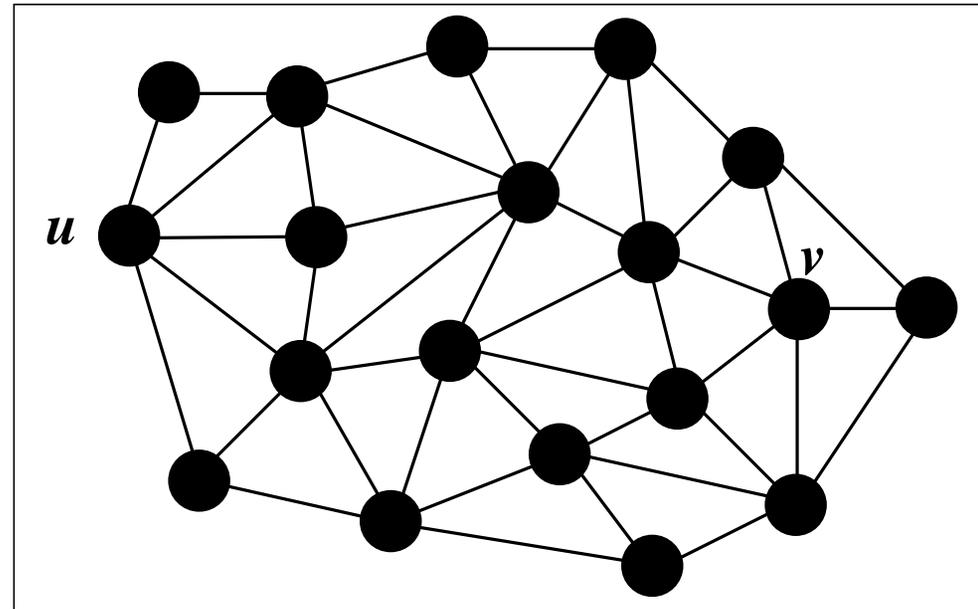
i) Si $(u, v) \notin E$ entonces el mínimo número de nodos ($\neq u, v$) separando u de v en G es igual al máximo número de caminos independientes entre u y v en G .

ii) El mínimo número de aristas separando u de v en G es igual al máximo número de caminos arista disjuntos entre u y v en G .

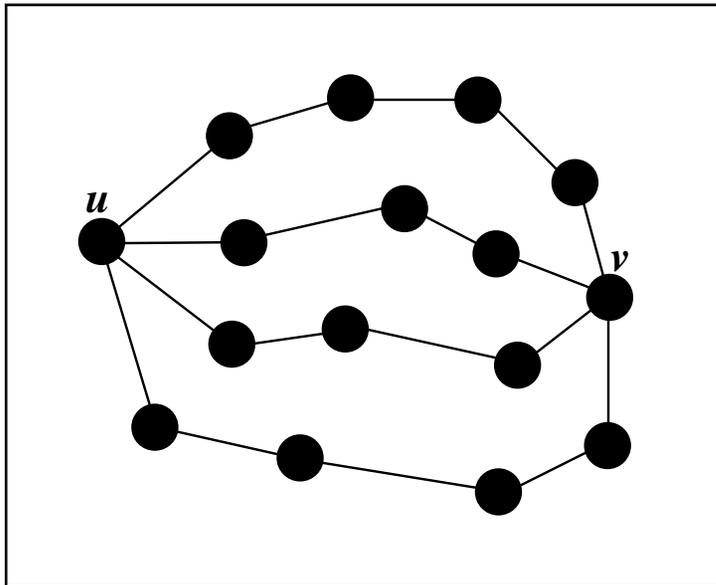
\Rightarrow EN PROBLEMAS DE DISEÑO DE REDES TOPOLOGICAMENTE ROBUSTAS ES DE ESPECIAL INTERÉS PODER DETERMINAR EN FORMA EFICIENTE LA CANTIDAD DE CAMINOS NODO-DISJUNTOS ENTRE PARES DE NODOS A EFECTOS DE CHEQUEAR LA FACTIBILIDAD DE LA RED DISEÑADA.

Conectividad.

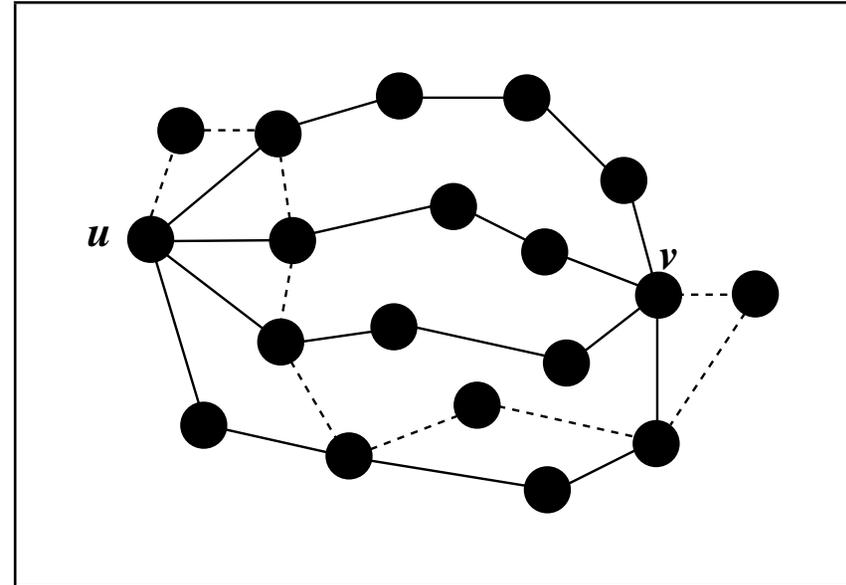
- DADO EL SIGUIENTE GRAFO, QUEREMOS DETERMINAR LA CANTIDAD DE CAMINOS NODO-DISJUNTOS Y ARISTA-DISJUNTOS ENTRE LOS NODOS u Y v .



Conectividad.



(a) u y v localmente 4-nodo-conexos.



(b) u y v localmente 4-arista-conexos.

Figure 13: Caminos nodo-disjuntos y arista-disjuntos entre u y v .

\Rightarrow TODO CONJUNTO DE NODOS SEPARADOR DE u Y v EN G TIENE AL MENOS 4 NODOS, MIENTRAS QUE TODO CONJUNTO DE ARISTAS SEPARADOR DE u Y v EN G TIENE AL MENOS 5 ARISTAS.

Conectividad.

Teorema 7 (Versión global de Teorema de Menger):

- i) Un grafo es k -nodo-conexo sii contiene k caminos independientes entre cualquier par de nodos.*
- ii) Un grafo es k -arista-conexo sii contiene k caminos arista-disjuntos entre cualquier par de nodos.*

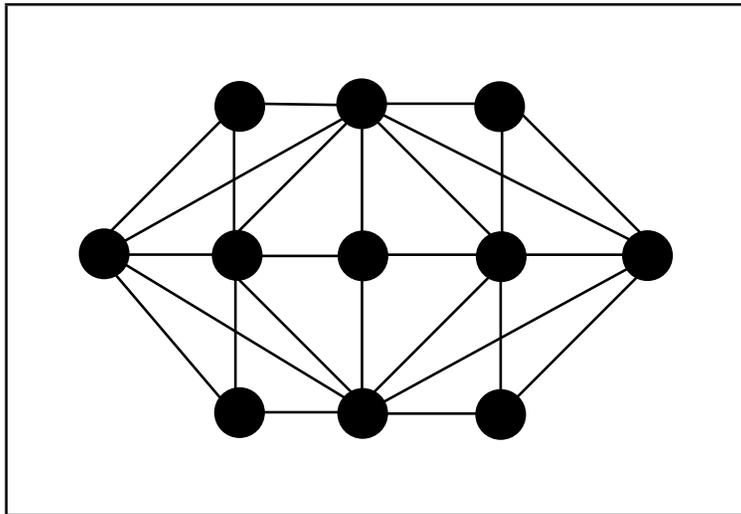
Dem. (i) Si un grafo G contiene k caminos independientes entre cualquiera par de nodos, entonces $|G| > k$ y G no puede ser separado por menos de k nodos; así G es k -nodo-conexo.

(ii) Inversamente, supongamos que G es k -nodo-conexo (y en particular que tiene más de k nodos) pero contiene nodos a y b no comunicados por

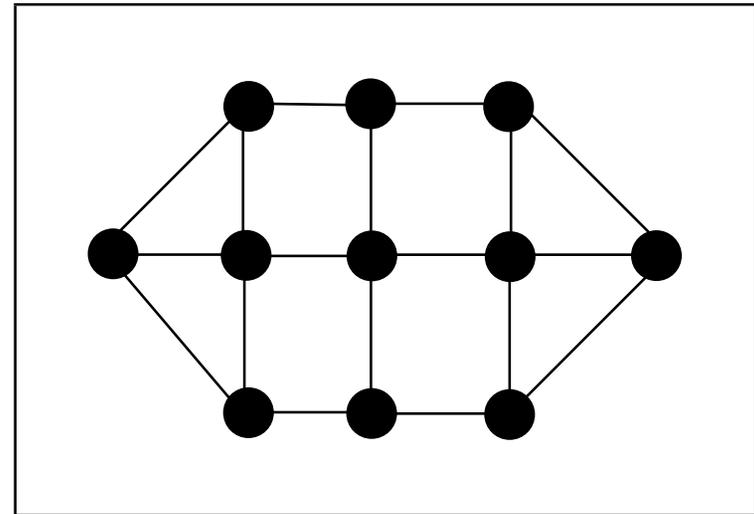
k caminos independientes. Por Corolario 2 parte (i), a y b son adyacentes; sea $G' = G \setminus (a, b)$. Entonces G' contiene a lo sumo $k - 2$ caminos independientes comunicando a y b . Por punto (i) del Corolario 2, podemos separar a y b en G' por un conjunto X de a lo sumo $k - 2$ nodos. Como $|G| > k$, hay al menos un nodo adicional $v \notin X \cup \{a, b\}$ en G . Ahora X separa v en G' o bien de a o de b . Supongamos que X separa v de a . Pero entonces $X \cup \{b\}$ es un conjunto de a lo sumo $k - 1$ nodos separando v de a en G , contradiciendo la k -nodo-conectividad de G .
(ii) se demuestra directamente del Corolario 2 parte (ii).

QED

Conectividad.



(a) Grafo G .



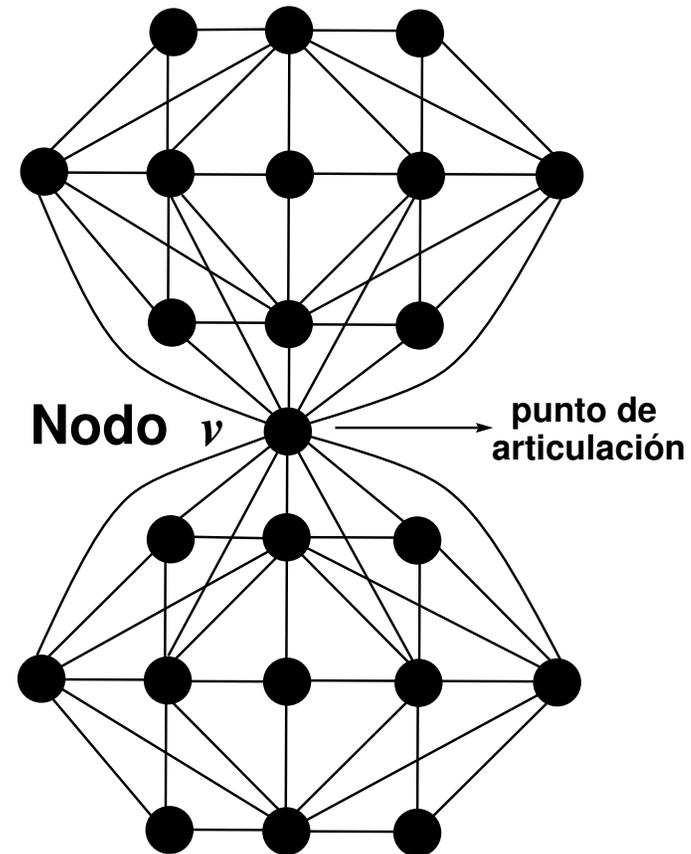
(b) Subgrafo $H \subset G$ tal que $k(H) = \lambda(H) = 3$.

Figure 14: Grafo que satisface $k(G) = \lambda(G) = 3$.

\Rightarrow EN ESTE CASO EL GAP DE CONECTIVIDAD ES CERO ($k(G) - \lambda(G) = 0$). SIN EMBARGO EXISTEN TOPOLOGIAS QUE SON MUY ROBUSTAS ANTE FALLAS EN LINKS PERO QUE UNA SIMPLE FALLA EN CIERTO NODO PUEDE DEJAR COMPLETAMENTE DESCONEXAS DOS GRANDES COMPONENTES DE LA RED.

Conectividad.

- UNA FALLA EN EL NODO v DEJARÍA COMO RESULTADO DOS COMPONENTES CONEXAS INCOMUNICADAS, I.E. $k(G) = 1$. SIN EMBARGO EL GRAFO G PUEDE RESISTIR HASTA 2 FALLAS SIMULTANEAS EN CUALESQUIERA 2 LINKS DE LA RED, I.E. $\lambda(G)=3$.



Conectividad.

¿Como podemos determinar en forma eficiente en la práctica la cantidad de caminos arista-disjuntos y nodo-disjuntos entre dos conjuntos de nodos dados?.

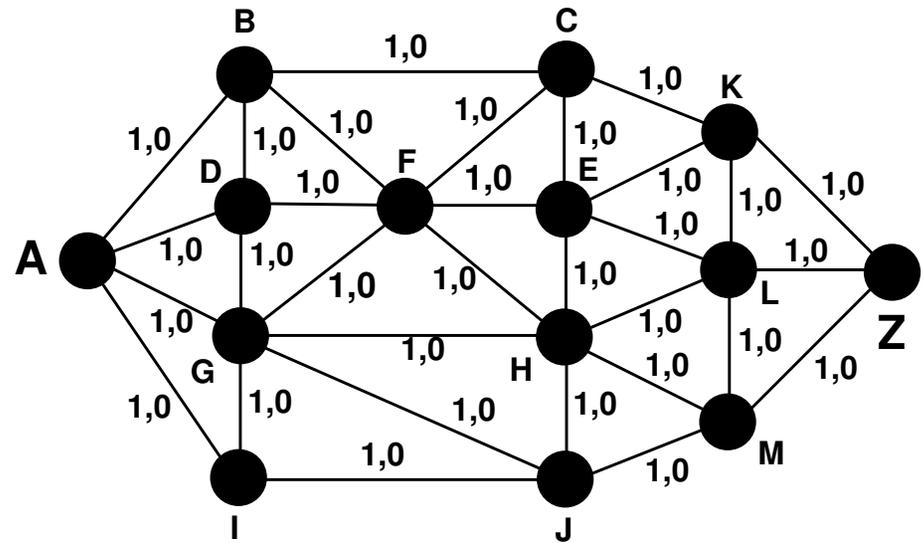
En general se utiliza el teorema de Ford-Fulkerson y generalizaciones para determinar cortes y conjuntos de nodos separadores entre subset de nodos pre-establecidos. Su enunciado en el contexto de redes de flujo es el siguiente:

Teorema 8 (Ford-Fulkerson 1956): *Dada una red de flujos, el valor del flujo máximo total es igual a la capacidad del corte mínimo.*

⇒ EN PARTICULAR CUANDO TODAS LAS CAPACIDADES DE LA RED SON IGUALES A 1 EL VALOR DEL CORTE MÍNIMO NOS DA LA CANTIDAD DE CAMINOS ARISTA-DISJUNTOS ENTRE EL NODO FUENTE Y EL NODO DESTINO.

Conectividad.

- DADA LA SIGUIENTE RED DE FLUJOS, SE PRETENDE DETERMINAR LA CANTIDAD DE CAMINOS ARISTA-DISJUNTOS ENTRE LOS NODOS *A* Y *Z*; PARA ELLO APLICAMOS EL ALGORITMO DE FORD-FULKERSON CON CAPACIDADES IGUALES A 1.



Conectividad.

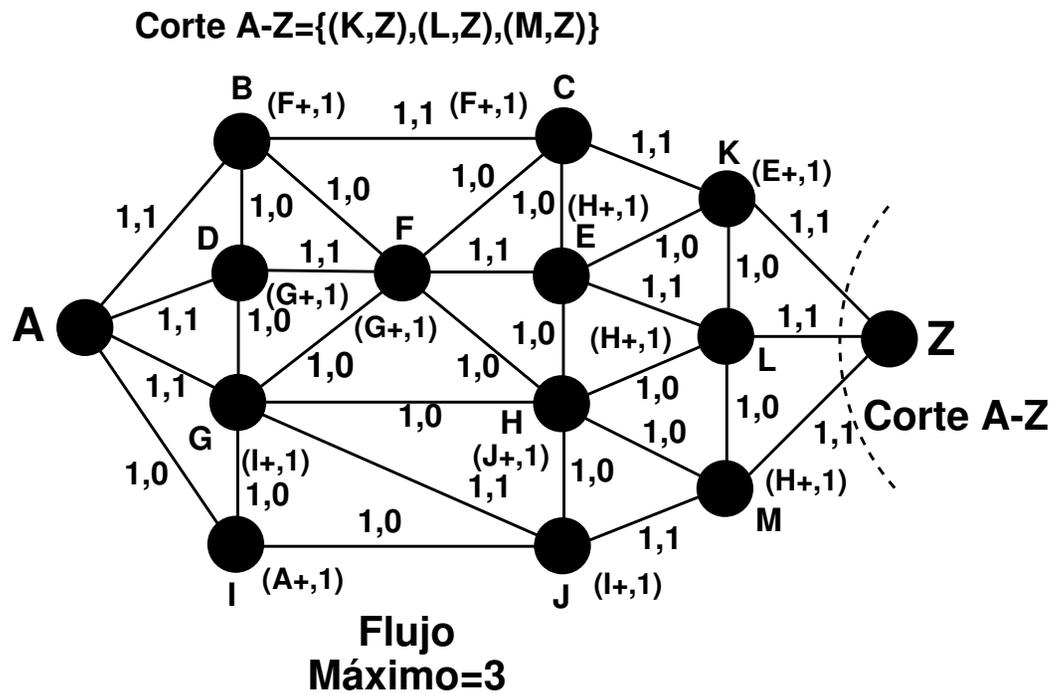


Figure 15: Resultado del Algoritmo de Ford-Fulkerson.

Conectividad.

Proposición 6: *Si G_1 y G_2 son subgrafos k -nodo-conexos de un grafo $G = (V, E)$ y además tienen al menos k nodos en común, entonces $G_1 \cup G_2$ es también un subgrafo k -nodo-conexo.*

Dem. Si $W \subset V(G_1) \cup V(G_2)$ tiene a lo sumo $k - 1$ nodos, entonces hay un nodo x en $(V(G_1) \cap V(G_2)) \setminus W$. Por lo tanto, los subgrafos conexos $G_1 \setminus W$ y $G_2 \setminus W$ de G tienen al menos un nodo en común, a saber x , así $(G_1 \cup G_2) \setminus W = (G_1 \setminus W) \cup (G_2 \setminus W)$ es conexo.

QED

\Rightarrow EL SIGUIENTE ES UN EJEMPLO ILUSTRATIVO DE ESTE RESULTADO DONDE G_1 Y G_2 SON SUBGRAFOS 2-NODO-CONEXOS.

Conectividad.

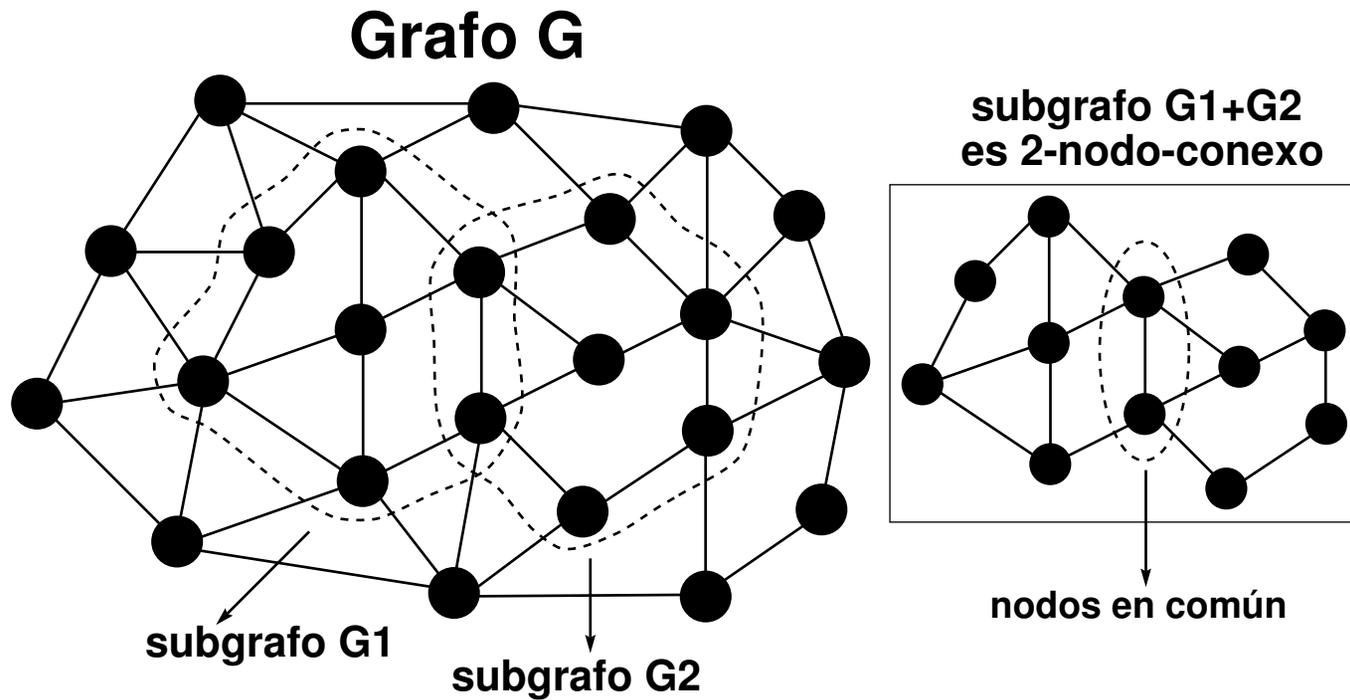


Figure 16: Unión de dos subgrafos 2-nodo-conexos.

Conectividad.

Proposición 7: *Sea $G = (V, E)$ un grafo k -nodo-conexo con $k \geq 2$. Entonces cualquier conjunto de k nodos de G se hayan en un ciclo común.*

Dem. Demostraremos esta propiedad por inducción en k .

PASO BASE: $k = 2$. Sea $W = \{w, v\} \subset V$ un conjunto con dos nodos cualesquiera de G . Como G es 2-nodo-conexo por teorema de Menger existen dos caminos nodo-disjuntos comunicando w y v en G , i.e. existe un ciclo que los contiene.

PASO INDUCTIVO: $k > 2$. Como hipótesis inductiva tenemos que la propiedad se cumple para todo grafo h -nodo-conexo, con $h < k$.

Sea $W \subseteq V$ un conjunto de k nodos de G . Sea $v \in W$ un nodo cualquiera. Definimos $\hat{W} = W \setminus v$ y el grafo auxiliar $\hat{G} = G \setminus v$ el cual contiene los nodos de \hat{W} . Claramente \hat{G} es $(k - 1)$ -nodo-conexo.

Como $|\hat{W}| = k - 1 \geq 2$, por hipótesis inductiva existe en \hat{G} un ciclo \hat{C} que contiene los nodos de \hat{W} . Sea $p \subset G$ un camino que conecta v con \hat{C} en G tal que $p \cap \hat{C} = \{w\}$, i.e. $w \in \hat{C}$ es el nodo extremo de p en \hat{C} . Sea $u \in \hat{C}$ un nodo adyacente a w en \hat{C} (la arista $(u, w) \in \hat{C}$). Definimos ahora $\bar{W} = W \setminus \{u, w\}$. Sea el grafo $\bar{G} = G \setminus \bar{W}$. Dado que $|\bar{W}| = k - 3$ es fácil ver que \bar{G} es 2-nodo-conexo y además contiene a la arista (u, w) y al nodo v . Por Lema de Berge existe en \bar{G} un ciclo \bar{C} que contiene a la arista (u, w) y al nodo v . Definamos ahora el ciclo: $C = (\hat{C} \setminus (u, w)) \cup \bar{C}$. Este ciclo está en G y contiene a los nodos de W como queríamos probar.

QED

Conectividad.

Proposición 8: *Sea $G = (V, E)$ un grafo k -nodo-conexo con $k \geq 2$ y $|V| \geq 2k$. Entonces en G existe un ciclo de longitud al menos $2k$.*

Dem. Demostraremos esta propiedad por inducción en k .

PASO BASE: $k = 2$ y $|V| \geq 4$. Como G tiene al menos cuatro nodos y es conexo existen entonces dos aristas $e_1 = (v_1, v_2)$ y $e_2 = (v_3, v_4)$ sin nodos en común. Dado que G es 2-nodo-conexo, por Lema de Berge, existe un ciclo $C \subseteq G$ que contiene las aristas e_1 y e_2 . Es fácil ver que $l(C) \geq 4$ puesto que C necesariamente tiene al menos 4 aristas.

PASO INDUCTIVO: $k > 2$ y $|V| \geq 2k$. Sea $v \in V$ un nodo cualquiera de G . Definimos el grafo $G' = G \setminus v$ y sea V' su conjunto de nodos. El grafo G' es $(k - 1)$ -nodo-conexo y además:

$$|V'| = |V| - 1 \geq 2k - 1 > 2k - 2 = 2(k - 1),$$

entonces por hipótesis inductiva existe en G' un ciclo C' de longitud al menos $2k - 2$. Si $l(C') \geq 2k$ no hay nada que probar. Sino:
 CASO $l(C') = 2k - 1$. Sea $W = \{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto de k nodos cualesquiera de C' . Como G es k -nodo-conexo existen k caminos independientes desde v hacia los nodos de W . Sea $W' = \{w_1, \dots, w_k\}$ los “primeros nodos” intersección de C' con estos caminos independientes y sean $\{p_1, \dots, p_k\}$ sus sub-caminos hacia W' . Necesariamente existen dos nodos $w_i, w_j \in W'$ que son adyacentes en C' . Consideremos ahora el ciclo: $C = (C' \setminus \{(w_i, w_j)\}) \cup p_i \cup p_j$. Entonces:

$$l(C) = l(C') - 1 + l(p_i) + l(p_j) = 2k - 1 - 1 + l(p_i) + l(p_j) \geq 2k.$$

CASO $l(C') = 2k - 2$. Es similar al caso anterior, pero considerando la existencia de otro nodo $u \notin W$, $u \neq v$ y procediendo de igual manera considerando caminos independientes desde u y v hacia C' .

QED

Conectividad.

- La versión “arista” del Teorema de Menger nos determina condiciones para la existencia de k caminos arista-disjuntos entre pares de nodos.
- En ciertos contextos es útil tener más que k -arista-conectividad. Por ejemplo, k -árboles de cubrimiento aristas disjuntos.
¿CUÁNDO EXISTEN TALES ÁRBOLES?.
- Claramente si G tiene k -árboles de cubrimiento arista-disjuntos entonces G es k -arista-conexo. El recíproco no es cierto.
- Considerando una partición de $V(G)$ en r conjuntos, cada árbol de cubrimiento de G tiene al menos $r - 1$ “aristas de cruce” (*cross-edges*), i.e. aristas cuyos extremos se hayan en diferentes conjuntos de la partición.

Conectividad.

Propiedad 1: *Si un grafo $G = (V, E)$ tiene k -árboles de cubrimiento arista-disjuntos y particionamos a V en r conjuntos, entonces G tiene al menos $k(r - 1)$ aristas de cruce.*

Dem. Cada árbol de cubrimiento tiene al menos $(r - 1)$ aristas de cruce. Dado que existen k arboles de cubrimiento que no comparten ninguna arista entre sí, tenemos entonces $k(r - 1)$ aristas de cruce.

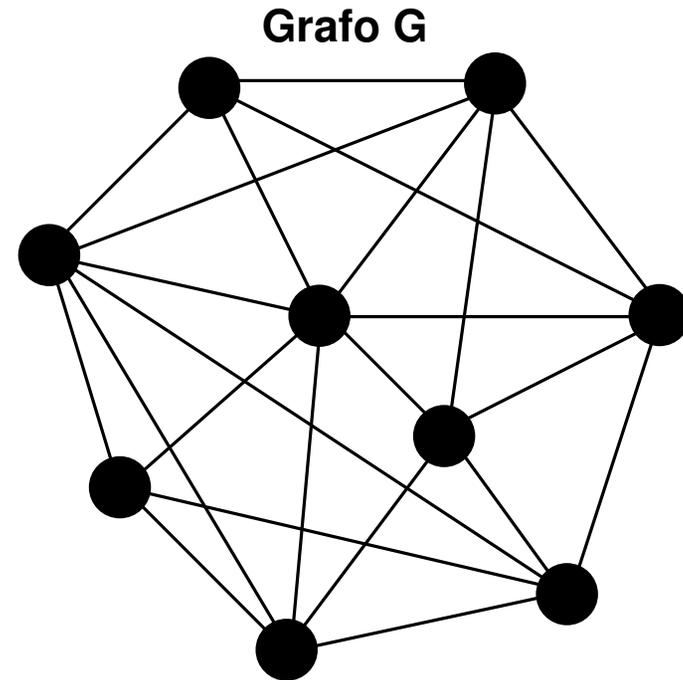
QED

⇒ ESTA CONDICIÓN NECESARIA TAMBIÉN ES SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE k -ÁRBOLES DE CUBRIMIENTO ARISTA-DISJUNTOS.

Conectividad.

Teorema 9 (Tutte-Nash-Williams 1961): *Un multigrafo contiene k árboles de cubrimiento arista-disjuntos sii para cualquier partición P de su conjunto de nodos hay al menos $k \cdot (|P| - 1)$ “aristas de cruce”.*

⇒ GRAFO 3-ARISTA-CONEXO QUE
POSEE 3 ÁRBOLES DE
CUBRIMIENTO ARISTA-DISJUNTOS.



Conectividad.

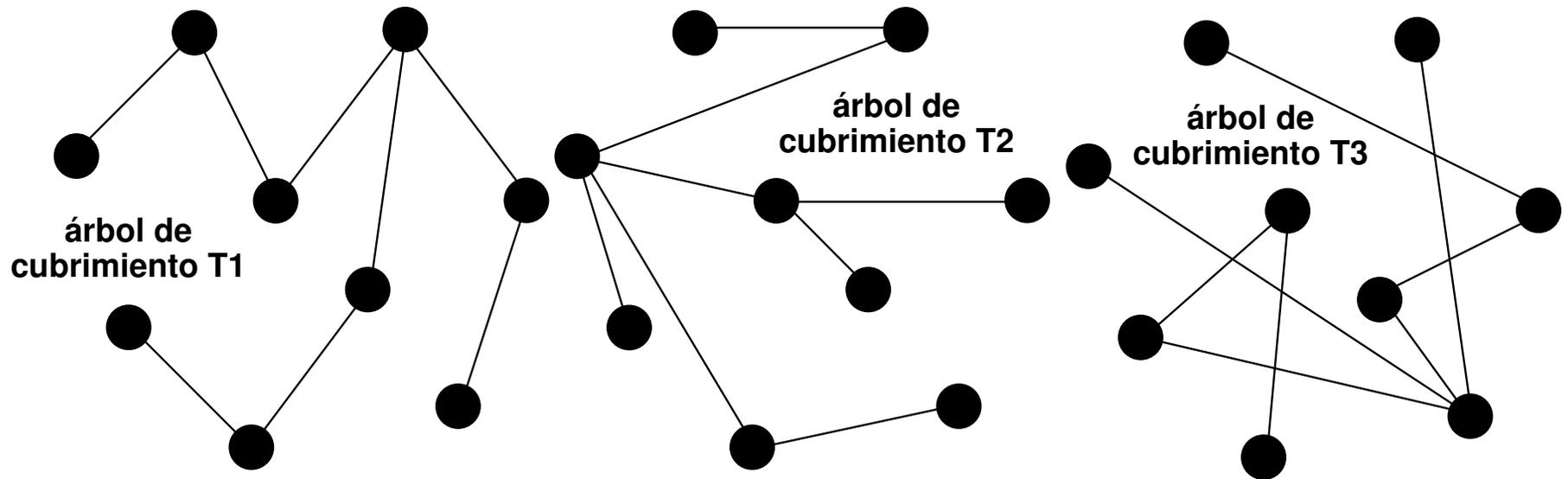


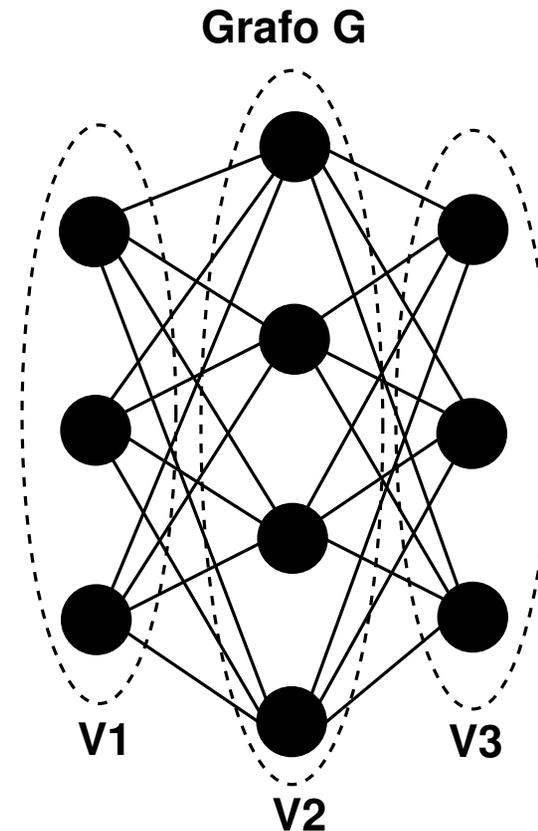
Figure 17: Tres árboles de cubrimiento arista-disjuntos de G .

NOTA: EN ESTE CASO SE SATISFACE ADEMÁS QUE $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = G$.

Conectividad.

EN EL SIGUIENTE EJEMPLO EL GRAFO $G = (V, E)$ (CON $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$) SATISFACE QUE $G(V_1 \cup V_2)$ Y $G(V_2 \cup V_3)$ SON BIPARTITOS Y $E(V_1, V_3) = \emptyset$. EN ESTAS CONDICIONES, ES FÁCIL PROBAR QUE PARA TODA PARTICIÓN P DE V SE TIENE AL MENOS $\delta(G) = 4$ ARISTAS DE CRUCE.

¿CUANTOS ÁRBOLES DE CUBRIMIENTO ARISTA-DISJUNTOS TIENE G ?



Conectividad.

Corolario 3: *Un multigrafo $G = (V, E)$ que sea $2k$ -arista-conexo tiene k árboles de cubrimiento arista-disjuntos.*

Dem. Cada conjunto en una partición P de V esta conectada a otros conjuntos de la partición por al menos $2k$ aristas. Por lo tanto, para cualquier partición en r conjuntos, G tiene al menos $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r 2k = kr$ aristas de cruce. Como $kr > k(r - 1)$ entonces por Teorema 9, G tiene k árboles de cubrimiento arista-disjuntos.

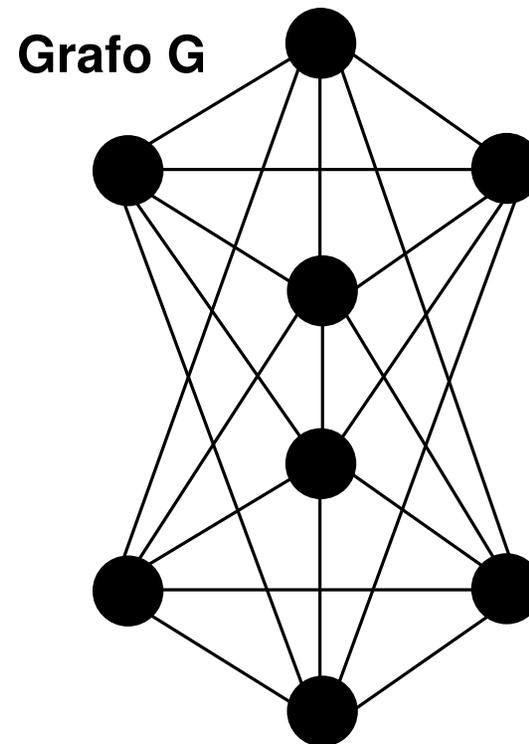
QED

ESTE COROLARIO NOS DA UNA CONDICIÓN SUFICIENTE DE EXISTENCIA DE k ÁRBOLES DE CUBRIMIENTO ARISTA-DISJUNTOS EN UN GRAFO G . NOTEMOS QUE LOS REQUERIMIENTOS DE ARISTA-CONECTIVIDAD “SON ELEVADOS”, ASÍ POR EJEMPLO, SI $k = 2$ DEBERIAMOS CHEQUEAR LA 4-ARISTA-CONEXIDAD DE G PARA ASEGURAR LA EXISTENCIA DE 2 ÁRBOLES DE CUBRIMIENTO ARISTA-DISJUNTOS.

Conectividad.

⇒ EL SIGUIENTE GRAFO
 $G = (V, E)$ ES
4-ARISTA-CONEXO Y POR EL
COROLARIO ANTERIOR SE
ASEGURA LA EXISTENCIA DE 2
ÁRBOLES DE CUBRIMIENTO
ARISTA-DISJUNTOS.

SIN EMBARGO, POR INSPECCIÓN,
PODEMOS VER QUE EXISTEN 3
ÁRBOLES DE CUBRIMIENTO
ARISTA-DISJUNTOS.



Conectividad.

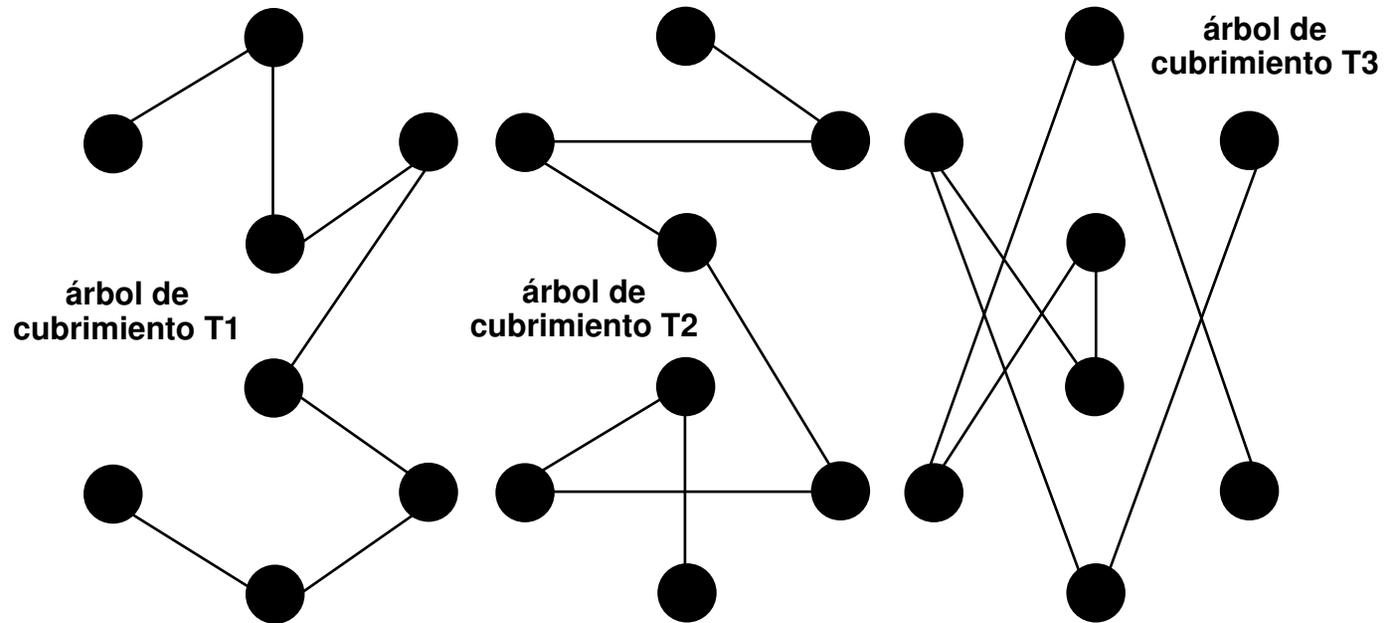


Figure 18: Tres árboles de cubrimiento arista-disjuntos de G .

SE SATISFACE ADEMÁS QUE $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = G$.

Conectividad.

Definición: Un grafo G con al menos $2k$ nodos es k – *linked* si para cualquier conjunto de $2k$ nodos $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ G contiene k caminos disjuntos p_1, \dots, p_k con $p_i = s_i \dots t_i$ para todo i .

Observaciones:

- A diferencia que en el teorema de Menger (donde se pide k caminos disjuntos entre dos conjuntos de nodos) en el caso de un grafo k – *linked* cada uno de estos caminos une un par específico de nodos extremo.
- Si un grafo G es k – *linked* entonces es k -nodo-conexo. El recíproco no es cierto. La propiedad de ser k – *linked* es en general mucho mas fuerte que la k -conectividad.

Conectividad.

¿COMO SE RELACIONAN LA k -CONECTIVIDAD Y LA PROPIEDAD DE SER k – *linked*?

Algunos resultados al respecto son los siguientes:

Teorema 10 (Jung-Larman-Mani 1970): *Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que cada grafo $f(k)$ -nodo-conexo es k – *linked*.*

Teorema 11 (Bollobás-Thomason 1996): *Un grafo $22k$ -nodo-conexo es k – *linked*.*

Teorema 12 (Thomas-Wollan 2005): *Sea G un grafo y $k \in \mathbb{N}$. Si G es $2k$ -nodo-conexo y $\epsilon(G) \geq 8k$ entonces G es k – *linked*.*

Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Nos centraremos solamente en aspectos topológicos, típicamente vemos la red como un conjunto de centrales (nodos) y links de fibra óptica interconectándolos.
- Sobrevivencia (*Survivability*) en este contexto se refiere a la existencia entre cualquier par de nodos de un número preestablecido de caminos que no tienen ningún nodo o link en común.
- Los costos considerados son costos asociados con la topología de la red como ser el tendido de líneas y la puesta en estado operacional de la fibra óptica.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Los modelos que tienen en cuenta el tráfico en la red claramente están más cercanos a la realidad, sin embargo, en general, éstos son más complejos y tecnológicamente dependientes.
 - En la práctica las redes de alto porte se planifican en dos fases:
 - I) primeramente el diseño de la estructura topológica
 - II) y en una segunda fase de optimización se considera la matriz de tráfico y los costos de ruteo.
- ⇒ ABORDAREMOS EL PROBLEMA (I) CON ÉNFASIS EN MODELOS DE SOBREVIVENCIA (*survivable models*) “ALTAMENTE CONFIABLES”.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Situándonos en el contexto de redes telefónicas, los nodos a conectar se pueden clasificar en tres clases según su importancia:

- Nodos especiales, para los cuales se requiere un “alto” nivel de sobrevivencia en la red a ser contruida.
- Nodos ordinarios, los cuales se requiere que simplemente estén conectados a la red.
- Nodos opcionales, los cuales pueden formar parte o no de la red a diseñar.

⇒ El costo de cada posible link a instalar tiene asociado el costo de colocación de la fibra óptica y su puesta en servicio operativo. Típicamente el dragado para el tendido de líneas es lo que insume mayor costo durante la construcción de la red.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Informalmente, el problema de diseño de redes de gran talla de alta velocidad consiste en seleccionar los links donde ubicar los cables de fibra óptica de modo que la suma de los costos de instalación sea minimizada y ciertos requerimientos de sobrevivencia sean asegurados, como por ejemplo:

- la destrucción de un simple link no desconecte dos nodos especiales o
- la destrucción de un simple nodo no desconecte dos nodos especiales.

Esto es equivalente a requerir que entre dos nodos especiales haya:

- al menos dos caminos arista-disjuntos, o
- al menos dos caminos nodo-disjuntos.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Hasta mediados de la década de los '80 las grandes compañías telefónicas estaban satisfechas con bajos requerimientos de conectividad soportando fallas en un simple nodo o link de la red.
- Desde fines de la década de los '80 se han investigado e instalado modelos de red con niveles de sobrevivencia más generales, los cuales también toman en consideración altos requerimientos de conectividad.
- Por ejemplo, el software distribuido por Bellcore (Laboratorios Bell - 1988): *FIBER OPTIONS, Software for designing survivable optimal fiber networks.*
- La motivación del diseño de redes de uso militar altamente robustas, e.g. el kernel de fibra óptica de acorazados y portaaviones.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Definición: El requerimiento de sobrevivencia o “importancia” de un nodo es modelado por “tipos de nodos”. En particular, dado un grafo $G = (V, E)$, cada nodo $s \in V$ tiene asociado un entero no-negativo r_s (el **tipo** de s), también denotado $r(s)$.

Definición: Decimos que un subgrafo $N = (V, F)$ satisface las condiciones de nodo-sobrevivencia (o requerimientos de nodo-conectividad) si $\forall s, t \in V$, N contiene al menos $r(s, t) = \min\{r_s, r_t\}$ caminos nodo-disjuntos entre s y t .

Definición: Decimos que un subgrafo $N = (V, F)$ satisface las condiciones de arista-sobrevivencia (o requerimientos de arista-conectividad) si $\forall s, t \in V$, N contiene al menos $r(s, t) = \min\{r_s, r_t\}$ caminos arista-disjuntos entre s y t .

Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Las condiciones anteriores aseguran que la comunicación entre los nodos s y t sobrevivirán a un nivel preestablecido de fallas en aristas (o nodos).
- Si todos los nodos son del mismo tipo k , el objetivo es encontrar una subred k -nodo-conexa (resp. k -arista-conexa) que cubra V con costo mínimo.

Definición: La arista-conectividad (resp. nodo-conectividad) de un grafo G es el máximo valor de k para el cual éste es k -arista-conexo (resp. nodo-conexo). Un grafo 1-arista-conexo es también 1-nodo-conexo.

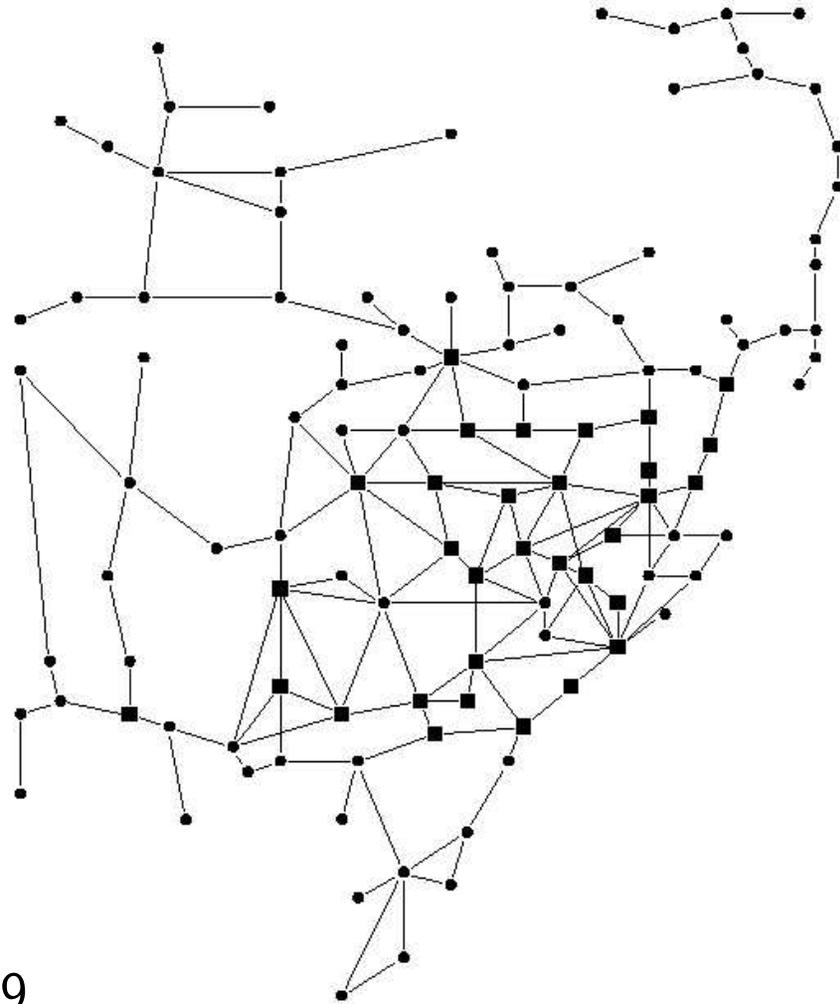
⇒ MODELOS 1-NODO-SOBREVIVIBLES (O 1-ARISTA-SOBREVIVIBLES) SON DE POCA UTILIDAD CUANDO SE PLANIFICAN SISTEMAS CRÍTICOS DE ALTO PORTE DEBIDO A QUE UNA SIMPLE FALLA PUEDE SER CATASTRÓFICA PARA EL SISTEMA.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Es posible generalizar el modelo de sobrevivencia introducido anteriormente, especificando niveles de sobrevivencia r_{ij} en forma independiente para cada par de nodos $i, j \in V$. Es decir, se dispone de una matriz de enteros no-negativos $R = \{r_{ij}\}_{i,j \in V}$ estableciendo los niveles de nodo-sobrevivencia (o arista-sobrevivencia) requeridos entre pares de nodos de la red.
- Bell provee problemas de diseño de redes de fibra óptica basados en un vector de tipo de nodos $r = (r_i)_{i \in V}$ donde:
 - “nodos especiales” son representados por nodos de tipo 2,
 - “nodos ordinarios” son representados por nodos de tipo 1,
 - “nodos opcionales” son representados por nodos de tipo 0.

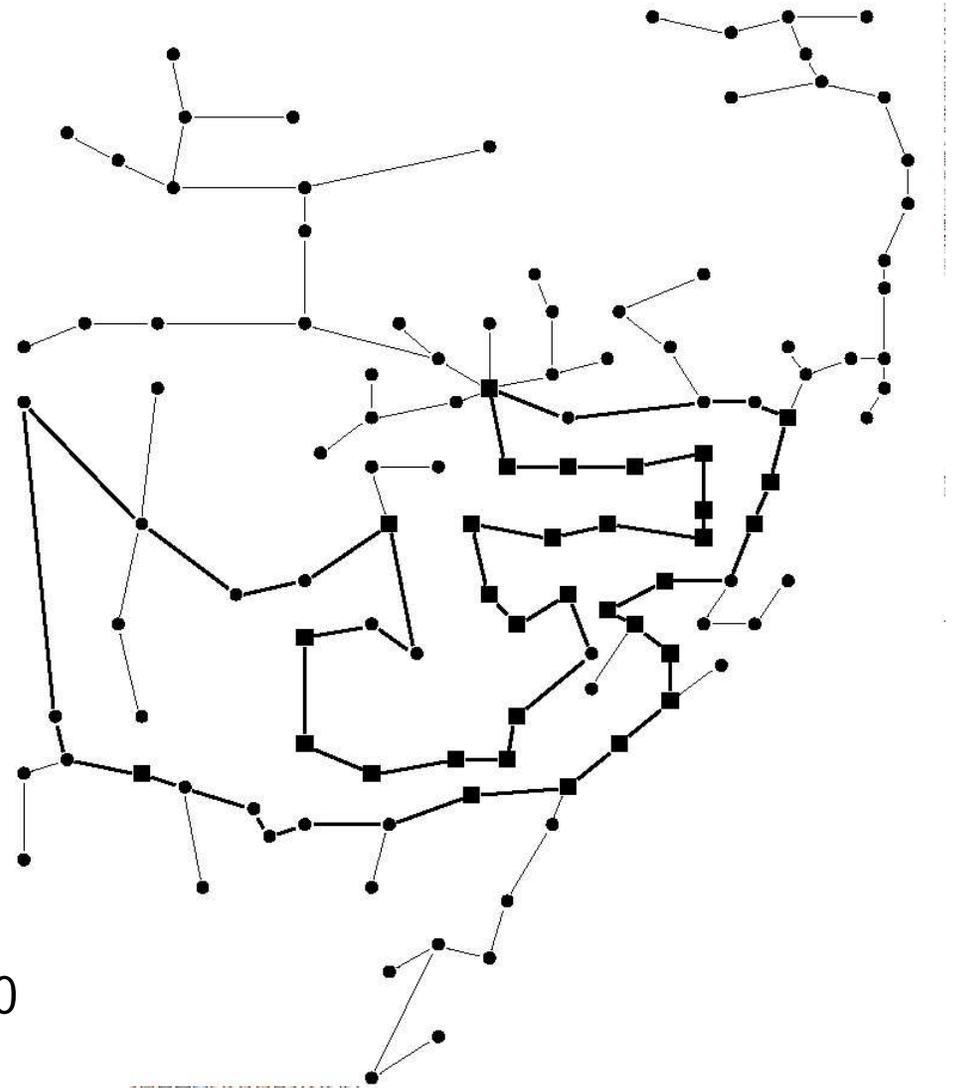
Diseño Topológico de Redes Robustas.

- EL SIGUIENTE PROBLEMA (DENOMINADO LATADL) ES UN MODELO DE LABORATORIOS BELL. LOS NODOS ESPECIALES SON INDICADOS POR NODOS CUADRADOS Y LOS NODOS ORDINARIOS POR NODOS REDONDOS. NO EXISTEN NODOS OPCIONALES. LAS LINEAS REPRESENTAN LOS LINKS FACTIBLES DE LA RED A DISEÑAR.



Diseño Topológico de Redes Robustas.

- LA SIGUIENTE RED ES LA SOLUCIÓN ÓPTIMA DEL PROBLEMA LATADL. ÉSTA CONSISTE DE UN GRAN CICLO CONTENIENDO LOS NODOS ESPECIALES Y UNA COLECCIÓN DE ÁRBOLES CONECTANDO LOS NODOS ORDINARIOS A LA PARTE 2-NODO-CONEXA DE LA RED.



Diseño Topológico de Redes Robustas.

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo y $Z \subset V$ un conjunto de nodos, diremos que Z es un **conjunto de articulación** si $G \setminus Z$ tiene mas componentes conexas que G .

OTRA FORMULACIÓN ALTERNATIVA DEL TEOREMA DE MENGER ES LA SIGUIENTE:

Teorema 13 (Menger):

- 1) *En un grafo $G = (V, E)$ no hay ningún conjunto de corte de tamaño $k - 1$ o menor desconectando dos nodos s y t sii existen al menos k caminos arista-disjuntos entre s y t en G .*
- 2) *Sean s y t dos nodos no adyacentes de G . Entonces no hay ningún conjunto de articulación de tamaño $k - 1$ o menor desconectando s y t sii existen al menos k caminos nodo-disjuntos entre s y t en G .*

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Corolario 4 (Menger): *En un grafo $G = (V, E)$ no hay ningún conjunto de nodos Z y ningún conjunto de aristas F de tamaños $|Z| + |F| \leq k - 1$ con la propiedad que en $(G \setminus Z) \setminus F$ dos nodos s y t están desconectados sii existen al menos k caminos nodo-disjuntos entre s y t en G .*

Dem. Si s y t no son adyacentes, aplicamos el Teorema de Menger parte 2. Si s y t son adyacentes, eliminamos de G el conjunto F de aristas paralelas entre s y t y aplicamos nuevamente el Teorema de Menger parte 2.

QED

\Rightarrow EN BASE AL ENUNCIADO DEL TEOREMA DE MENGER Y SU COROLARIO INTRODUCIREMOS LAS DEFINICIONES FORMALES DE k -NODO-SOBREVIVENCIA Y k -NODO-CONECTIVIDAD EN GRAFOS DONDE SE PERMITEN ARISTAS PARALELAS.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Definición (k -nodo-sobrevivencia): Un grafo $G = (V, E)$ se dice k -nodo-sobrevivible si entre cualquier par de nodos s y t existe entre ellos al menos k caminos nodo-disjuntos, donde aristas paralelas entre s y t son contadas como caminos nodo-disjuntos diferentes. Equivalentemente (por Corolario 4), un grafo es k -nodo-sobrevivible si no existen conjuntos $S \subseteq V$ y $F \subseteq E$ con $|S| + |F| \leq k - 1$, tal que en $G \setminus (S \cup F)$ dos nodos están desconectados.

Definición: una componente k -nodo-sobrevivible de un grafo es un subgrafo que es k -nodo-sobrevivible y maximal respecto a esta propiedad.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Definición (k -nodo-conectividad): Un grafo $G = (V, E)$ se dice k -nodo-conexo si entre cualquier par de nodos s y t existe entre ellos al menos k caminos nodo-disjuntos, donde una o mas aristas paralelas entre s y t son contadas como un único camino entre s y t . Equivalentemente (por Teorema de Menger), un grafo es k -nodo-conexo si tiene al menos $k + 1$ nodos y no existe un conjunto $S \subseteq V$ con $|S| \leq k - 1$, tal que en $G \setminus S$ dos nodos están desconectados.

Definición: una componente k -nodo-conexa de un grafo es un subgrafo que es k -nodo-conexo y maximal respecto a esta propiedad.

\Rightarrow La k -nodo-sobrevivencia y k -nodo-conectividad coinciden en grafos que no tienen aristas paralelas. En general, la definición de k -nodo-sobrevivencia es de interés en grafos pequeños permitiendo aristas paralelas para dar robustez al modelo.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Dado un grafo $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j) \in E}$, y un vector de tipo de nodos $r = (r_i)_{i \in V}$, donde hay al menos 2 nodos del tipo k , definimos:

Problema k NCON: consiste en encontrar la sub-red de costo mínimo que satisface las condiciones de nodo-sobrevivencia.

Problema k ECON: consiste en encontrar la sub-red de costo mínimo que satisface las condiciones de arista-sobrevivencia.

Cuando el mayor valor del tipo de nodo no es especificado, se les llama NCON y ECON a estos problemas.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Antes de definir los problemas k NCON y k ECON como problemas de Programación Lineal Entera, introducimos la siguiente notación:

- $r(W) = \max\{r_s | s \in W\}$ para todo $W \subseteq V$,
- $con(W) = \max\{r(s, t) | s \in W, t \in V \setminus W\} = \min\{r(W), r(V \setminus W)\}$, para todo $W \subseteq V$, $\emptyset \neq W \neq V$. Además $con_G(W)$ denota $con(W)$ respecto al grafo G .
- $\delta(W) = \{(i, j) \in E | i \in W, j \in V \setminus W\}$ es el corte inducido por W . Además $\delta_G(W)$ denota $\delta(W)$ respecto al grafo G .
- $[W : W'] = \{(i, j) \in E | i \in W, j \in W'\}$. Notar que:
 $\delta(W) = [W : V \setminus W]$.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Dado el grafo $G = (V, E)$ en las condiciones del k NCON, para cada arista $e \in E$ introducimos una variable $x_e \in \mathbb{R}$ y consideramos un vector x indexado por E definido en el espacio \mathbb{R}^E . Cada subconjunto $F \subseteq E$ induce un vector incidente $X^F = (X_e^F)_{e \in E} \in \mathbb{R}^E$ seteando

$$X_e^F = \begin{cases} 1, & \text{si } e \in F; \\ 0, & \text{0 sino.} \end{cases}$$

Recíprocamente, cada 0/1-vector $x \in \mathbb{R}^E$ induce el subconjunto de aristas de E :

$$F^x = \{e \in E \mid x_e = 1\}.$$

Para cualquier subconjunto de aristas $F \subseteq E$, se define $x(F) = \sum_{e \in F} x_e$.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA ASOCIADO AL PROBLEMA k NCON:

$$\min = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

sujeto a:

$$x(\delta(W)) \geq \text{con}(W), \quad \forall W \subseteq V, \emptyset \neq W \neq V; \quad (2)$$

$$x(\delta_{G-Z}(W)) \geq \text{con}_{G-Z}(W) - |Z| \quad (3)$$

$$\forall Z \subseteq V, \emptyset \neq Z \neq V \text{ y } \forall W \subseteq V \setminus Z,$$

$$\emptyset \neq W \neq V \setminus Z \text{ con } |Z| < \text{con}_{G-Z}(W);$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E; \quad (4)$$

$$x_{ij} \text{ entera} \quad \forall (i, j) \in E. \quad (5)$$

Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Cada solución factible x del problema anterior, define un subgrafo $N = (V, F^x)$ de G que satisface todos los requerimientos de conectividad para el k NCON.
- Eliminando la restricción (3) se obtiene un modelo de Programación Lineal Entera para el problema k ECON.
- En [1] se estudian en profundidad los problemas k NCON y k ECON mediante un **enfoque poliedral** y se analizan diferentes LP-relajaciones con la ayuda de algoritmos de corte de plano (*cutting plane approach*).
- Los problemas k NCON y k ECON pertenecen a la clase de problemas NP – hard.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Notación: Dado un grafo $G = (V, E)$, una matriz de costos reales no-negativos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j) \in E}$ y un vector de enteros positivos $r = (r_i)_{i \in V}$ (o una matriz de enteros positivos $r = \{r_{ij}\}_{i,j \in V}$) notamos por $\text{NCON}(G; r)$ (resp. $\text{ECON}(G; r)$) al problema de encontrar un subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo satisfaciendo los requerimientos de nodo-sobrevivencia (resp. arista-sobrevivencia) especificados por el vector de tipos r o matriz de requerimientos de conexión r .

- Dependiendo del contexto se indicará si r es un vector (vector de **tipo** de nodos) o una matriz.
- El problema $\text{NCON}(G; r)$ con r como matriz de requerimientos de conexión fue introducido por Steiglitz, Weiner y Kleitman en 1969.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Otro modelo estrechamente relacionado con el NCON y el ECON es el “Problema General de Steiner” (*Generalized Steiner Problem* - GSP) introducido por Winter en 1987 y cuya formulación es la siguiente:

Definición (GSP-NC, GSP-EC): Dado un grafo simple $G = (V, E)$, un subconjunto de nodos $T \subseteq V$ denominados terminales, una matriz de costos reales no-negativos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j) \in E}$ y una matriz de enteros positivos $R = \{r_{ij}\}_{i,j \in T}$; el objetivo es encontrar un subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo tal que $\forall i, j \in T$ existan al menos r_{ij} caminos nodo-disjuntos (resp. arista-disjuntos) comunicando i con j en H .

Un caso particular que ha sido muy estudiado es cuando $r_{ij} = 1, \forall i, j \in T$, conocido como “Problema del árbol de Steiner” (*Steiner tree problem*).

Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Casos polinómicamente resolubles del NCON y ECON aparecen cuando tenemos: costos uniformes, costos 0/1, tipo de nodos restringido, y clases especiales de grafos.
- Para ciertos problemas k ECON con costos restringidos, e.g. satisfaciendo desigualdad triangular, se conocen cotas inferiores y heurísticas con radio de performance garantido para el peor caso.
- Algoritmos que resuelven instancias de problemas ECON no necesariamente resuelven la versión NCON del problema. De hecho, existen casos de problemas ECON resolubles en forma exacta polinomialmente, mientras que para la versión NCON del mismo, es un problema abierto la existencia de un algoritmo polinomial que lo resuelva.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Chou y Frank introducen un algoritmo polinomial que resuelve en forma exacta el problema $ECON(G; R)$ con costos uniformes; a saber:

Problema: Dado requerimientos de arista-conectividad $R = \{r_{ij}\}_{i,j \in V}$, encontrar un grafo satisfaciendo estos requerimientos con mínimo número de aristas (con o sin aristas paralelas).

- El algoritmo de Chou-Frank reduce este problema a un problema con vector de tipo de nodos mediante la asignación: $r_i := \max_{j \in V} \{r_{ij}\}$.
- Frank y Chou resuelven también este problema cuando no se permiten aristas paralelas pero sí nodos extra en la construcción.

⇒ NO SE CONOCEN ALGORITMOS POLINOMIALES PARA LA VERSIÓN DE NODO-CONECTIVIDAD DEL PROBLEMA ANTERIOR.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Lema 4 (Boesch-Frank): *Dado tipos de nodos $r_i \geq 2$ para un conjunto de nodos V , el mínimo número de aristas de un grafo satisfaciendo los requerimientos de arista-conectividad dados por r es: $\lceil \frac{1}{2} \sum_{i \in V} r_i \rceil$; el uso de aristas paralelas esta permitido en la construcción.*

Dem. Si hay dos nodos con mayor valor de tipo de nodo, el algoritmo de Chou-Frank produce una solución H donde cada nodo i tiene grado r_i , excepto por un posible nodo j de grado $r_j + 1$. Dado que éstos son los menores valores posibles para los grados de los nodos en H , tenemos:

$$\left\lceil \frac{1}{2} \sum_{i \in V} r_i \right\rceil \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in V} d_H(i) \leq \left\lceil \frac{1}{2} \sum_{i \in V \setminus j} r_i + \frac{(r_j + 1)}{2} \right\rceil.$$

QED

Diseño Topológico de Redes Robustas.

⇒ STOER INTRODUCIÓ UNA MODIFICACIÓN DEL ALGORITMO DE CHOU-FRANK EN LA CUAL SE CONSIDERAN NODOS DE TIPO 1.

Consideremos ahora el problema $\text{NCON}(G; R)$ con costos uniformes sin aristas paralelas; a saber:

Problema: Dado requerimientos de nodo-conectividad $R = \{r_{ij}\}_{i,j \in V}$, encontrar un grafo satisfaciendo estos requerimientos con mínimo número de aristas (aristas paralelas no están permitidas).

- Este problema fue atacado en el caso de requerimientos de nodo-conectividad uniformes, i.e. $r_{ij} = k, \forall i, j \in V$ para algún $k \geq 2$. En este caso, Harary (1962) introdujo un algoritmo polinomial que lo resuelve en forma exacta.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Lema 5 (Harary): *Dado $k \geq 2$ y $n \geq k + 1$, el mínimo número de aristas en un grafo k -nodo-conexo de n nodos sin aristas paralelas es: $\lceil \frac{kn}{2} \rceil$.*

Proposición 9: *Un grafo simple k -nodo-conexo con $\lceil \frac{kn}{2} \rceil$ aristas, todos los nodos deben tener al menos grado k , excepto por algún nodo de grado $k + 1$.*

Dem. Sea $G = (V, E)$ un grafo k -nodo-conexo con $\lceil \frac{kn}{2} \rceil$ aristas. Supongamos que existen en G dos nodos i y j de grado al menos $k + 1$. Claramente todos los nodos de G deben tener grado al menos k ; tenemos entonces que:

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_G(v) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V \setminus \{i, j\}} k + 2 \frac{(k + 1)}{2} = \frac{kn}{2} + 1 > \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil,$$

lo cuál es absurdo. Veamos ahora que es posible la existencia de un nodo j de grado $k + 1$. En dicho caso tendríamos:

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_G(v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V \setminus j} k + \frac{(k + 1)}{2} = \frac{1}{2}(nk + 1).$$

Donde si $kn = 2m + 1$ (impar) se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{2}(nk + 1) = \frac{1}{2}(2m + 2) = m + 1 = \left\lceil \frac{2m + 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil.$$

QED

Diseño Topológico de Redes Robustas.

⇒ STOER INTRODUCIÓ UNA MODIFICACIÓN DEL ALGORITMO DE CHOU-FRANK EN LA CUÁL SE CONSIDERAN NODOS DE TIPO 1.

Consideremos ahora el problema $NCON(G; R)$ con costos uniformes sin aristas paralelas; a saber:

Problema: Dado requerimientos de nodo-conectividad $R = \{r_{ij}\}_{i,j \in V}$, encontrar un grafo satisfaciendo estos requerimientos con mínimo número de aristas (aristas paralelas no están permitidas).

- Este problema fue atacado en el caso de requerimientos de nodo-conectividad uniformes, i.e. $r_{ij} = k, \forall i, j \in V$ para algún $k \geq 2$. En este caso, Harary (1962) introdujo un algoritmo polinomial que lo resuelve en forma exacta.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

⇒ EN BASE A LOS LEMAS ANTERIORES UNO PODRÍA SUPONER QUE EN EL CASO DEL $\text{NCON}(G; r)$ CON COSTOS UNIFORMES, EL MÍNIMO NÚMERO DE ARISTAS EN UN GRAFO SATISFACIENDO LOS REQUERIMIENTOS DE NODO-CONECTIVIDAD DADOS POR TIPOS DE NODOS $r_v \geq 2, \forall v \in V$ ES

$$\left\lceil \frac{1}{2} \sum_{v \in V} r_v \right\rceil,$$

PERO ESTA CONJETURA ES FALSA COMO LO MUESTRA EL SIGUIENTE CONTRAEJEMPLO.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Contraejemplo: *Sea una instancia 5NCON($G; r$), donde G es un grafo completo con $n \geq 6$ nodos, exactamente tres nodos de G son del tipo 5 y los otros de tipo 2. Entonces cada subgrafo de $G = (V, E)$ factible para el 5NCON($G; r$) usa más que: $\lceil \frac{15}{2} \rceil + (n - 3) = n + 5$ aristas de E .*

Dem. Sea w alguno de los nodos tipo 5. Supongamos que algún subgrafo $N \subset G$ es factible para el problema 5NCON y usa exactamente $n + 5$ aristas de G . La red $N \setminus w$ contiene cuatro caminos arista-disjuntos entre los otros dos nodos tipo 5, es decir, $N \setminus w$ debería ser factible para el problema 4ECON considerando $G \setminus w$ y en el cual todos los tipos de los nodos son reducidos en 1. Por lo tanto $N \setminus w$ usa al menos $4 + (n - 3)$ aristas de $G \setminus w$. Dado que N usa exactamente $n + 5$ aristas, el grado de w en N debe ser exactamente 4, lo cuál es imposible para un nodo de tipo 5.

QED

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Veremos ahora instancias NCON y ECON donde los costos de los arcos son 0 o 1. Estos problemas se conocen en la literatura como “Problemas de Aumentación” (*Augmentation Problems*) y se definen como:

Problema: Dado un grafo $G = (V, E)$, agregar el mínimo número de aristas posible de $V \times V$ (posiblemente usando aristas paralelas) de modo que el grafo resultante alcance los requerimientos de (nodo o arista)-conectividad especificados por $R = \{r_{ij}\}_{i,j \in V}$.

\Rightarrow Este problema puede verse como un problema de sobrevivencia del tipo $ECON(H; r)$ o $NCON(H; r)$ donde H es un grafo completo con conjunto de nodos V , todas las aristas de E tienen costo 0, y todas las aristas de $(V \times V) \setminus E$ tienen costo 1.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Existen numerosos trabajos que atacan el “Problema de Aumentación”, tanto la versión NCON como ECON.

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$, una matriz de requerimientos de arista-conectividad $R = \{r_{ij}\}_{i,j \in V}$ y un suconjunto de nodos $A \subseteq E$, se define **deficit del conjunto** A , notamos $\text{def}(A)$, al número:
 $\text{def}(A) = \min_{u \in A, v \notin A} r_{uv} - |\delta_G(A)|$. El deficit de A es la cantidad mínima de aristas a agregar a $\delta_G(A)$ para conectar suficientemente a A a todos los otros nodos.

- Si el conjunto A es particionado en t subconjuntos disjuntos $A_i, i \in 1..t$, una cota inferior de $\text{def}(A)$ es $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \text{def}(A_i)$. El siguiente teorema establece una relación entre esta cota inferior y la solución del “Problema de Aumentación”.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Teorema 14 (Frank 1990): *Dado un grafo $G = (V, E)$ y una matriz de requerimientos de arista-conectividad $R = \{r_{ij}\}_{i,j \in V}$; se cumple la siguiente propiedad.*

Si todos los conjuntos $A \subseteq V$ tienen deficit mayor a 1, entonces el mínimo número de aristas a agregar a G para satisfacer los requerimientos de arista-conectividad es:

$$\max_{A_1, \dots, A_t \text{ disjuntos}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \text{def}(A_i).$$

Si algún conjunto de nodos A tiene deficit ≤ 1 , y todos los subconjuntos propios de A tiene deficit ≤ 0 , entonces el mínimo número de aristas a agregar a G es $\text{def}(A)$ mas el mínimo número de aristas a agregar a $G \setminus A$. Aristas paralelas son permitidas en la aumentación.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Existen casos de NCON y ECON con costos generales los cuales son resolubles en forma exacta en orden polinomial. A saber:

- $r_i = 1$ para todo nodo i (*Minimum Spanning Tree Problem*),
- $r_i = k$ para exactamente dos nodos s y t , y $r_i = 0$ para los otros nodos (*k-shortest path problem*),
- $r_i \in \{0, 1\}$ para todos los nodos, y además el número de nodos de tipo 0 o bien el número de nodos de tipo 1 es restringido (caso particular del *Steiner Problem in Graphs*).
- Otros casos resolubles polinomialmente se presentan para topologías particulares del grafo G , como ser grafos serie-paralelos, outerplanares y de Halin.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Monma y Shallcross proponen heurísticas para el 2ECON y 2NCON.
- Frederickson y Jájá proponen una heurística para el 2NCON con radio de performance $3/2$ bajo la hipótesis de desigualdad triangular entre costos de las aristas.
- Ko y Monma proponen heurísticas para el diseño topológico de redes k -arista-conexas y k -nodo-conexas.
- Goemans y Bertsimas proponen una heurística para el ECON($G; r$) con $r = (r_i)_{i \in V}$ y dan un radio de performance para el algoritmo.
- Goemans y Williamson proponen una heurística para el ECON($G; R$) con $R = \{r_{ij}\}_{i,j \in V}$ y dan un radio de performance para el algoritmo.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

HEURÍSTICA DE STEIGLITZ-WEINER-KLEITMAN PARA EL PROBLEMA $\text{NCON}(G; R)$ CON MATRIZ DE REQUERIMIENTOS $R = \{r_{ij}\}_{i,j \in V}$:

- Paso 1:** A cada nodo $v \in V$ se le asigna un entero identificador único n_v .
- Paso 2:** Se elige un nodo $x \in V$ con mayor deficit de conectividad. En caso de conflicto se elige el que tenga mayor valor de etiqueta.
- Paso 3:** Se elige un nodo $y \in V$ con segundo mayor deficit de conectividad y que no está ya conectado a x . En caso de conflicto, se elige el que esté a “menor distancia” de x .
- Paso 4:** Conectar x e y .
- Paso 5:** Actualizar los deficits de conectividad e ir a Paso 2.

\Rightarrow En la práctica, la solución puede no ser factible, en cuyo caso es necesario recomenzar el algoritmo para poder obtener un grafo conexo.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Si la solución es factible, la heurística de Steiglitz et al. aplica además un procedimiento de búsqueda local basado en la sustitución iterativa de pares de aristas por pares de aristas hasta que no haya más mejoras.
- Priem&Priem introducen un algoritmo derivado de la heurística de Steiglitz, llamado “Método Jerárquico” y se basa en la definición de dos clases de nodos:
 - Nodos primarios** modelando los sitios más importantes del backbone.
 - Nodos secundarios** modelando sitios menos importantes y utilizados como nodos de tránsito.
- Para cada una de estas clases se fija un nivel de conectividad particular denotado $PCONNECTIVITY$ y $SCONNECTIVITY$ respectivamente.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

MÉTODO GERÁRGICO DE PRIEM&PRIEM:

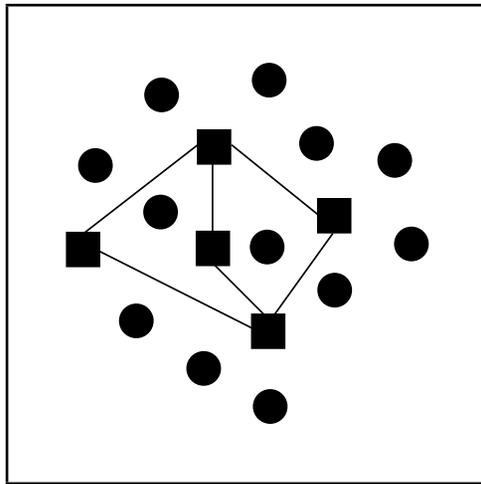
Paso 1: Aplicar la heurística de Steiglitz a los nodos primarios para satisfacer el nivel de conectividad requerido.

Paso 2: Cada nodo secundario es conectado al nodo primario más cercano.

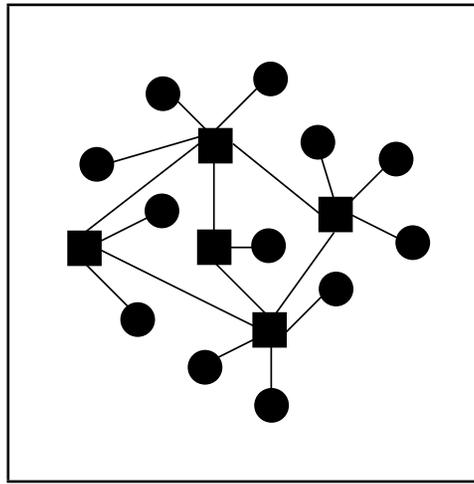
Paso 3: Aplicar la heurística de Steiglitz a los nodos secundarios para satisfacer el nivel de conectividad requerido.

- El Método Jerárquico es utilizado como parte del software llamado *WANCraft* utilizado para la concepción y dimensionamiento de una red WAN. En particular se usa en el diseño topológico del Backbone.
- El siguiente ejemplo ilustra la ejecución de los pasos del Método Jerárquico para el diseño de un Backbone. Tanto los nodos primarios como secundarios tienen nivel de conectividad igual a dos.

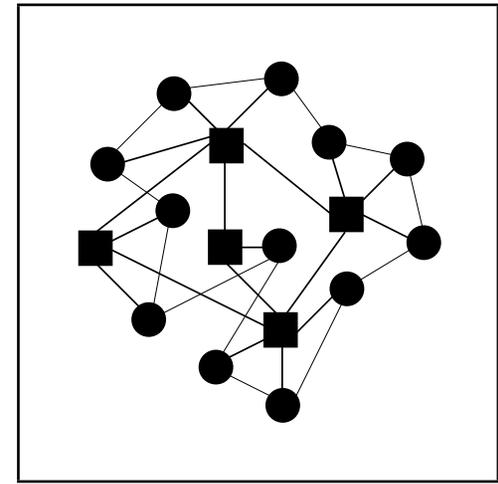
Diseño Topológico de Redes Robustas.



(a) Paso 1.



(b) Paso 2.



(c) Paso 3.

Figure 19: Ejecución del Método Jerárquico.

\Rightarrow LA SOLUCIÓN FACTIBLE CONSTRUIDA NO NECESARIAMENTE ES MINIMAL.

Diseño Topológico de Redes Robustas.

Sea una instancia $\text{ECON}(G; r)$ con $r = (r_i)_{i \in V}$ un vector de tipos de nodos y $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_p$ el orden de los distintos tipos de nodos en r . Sea $\rho_0 = 0$ y V_k el conjunto de nodos de tipo al menos ρ_k , $k \in 1 \dots p$.

TREE HEURISTIC (GOEMANS-BERTSIMAS):

Paso 1: $\forall u, v \in V$, sea c'_{uv} el costo del camino más corto en G .

Paso 2: Asignar $x_e = 0$ para toda $e \in V \times V$.

Paso 3: Desde $k = 1$ a p hacer:

3.1) Computar $T_k = (V_k, E_k)$ como el MST del grafo completo inducido por V_k con respecto a los costs c'_e .

3.2) Setear $x_e = x_e + (\rho_k - \rho_{k-1})$ para todo $e \in E_k$.

Paso 4: Reemplazar cada $(u, v) \in (V \times V)$ con $x_{uv} > 0$ por x_{uv} veces el camino más corto entre u y v cuyo costo es c'_{uv} .

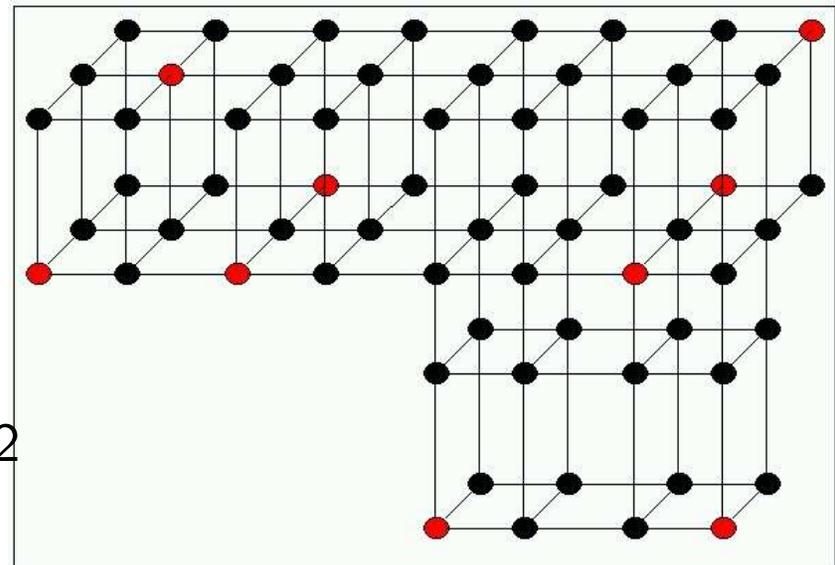
Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Las aristas pueden ser utilizadas más de una vez. La salida del algoritmo es un vector de enteros positivos $x = (x_e)_{e \in E}$ que satisface todas las desigualdades de corte $x(\delta(W)) \geq r(W)$.
- Una componente $x_e \geq 2$ se interpreta como “la arista e es utilizada x_e veces”.
- Sea y la solución de una LP-relajación del problema ECON consistiendo de las desigualdades de corte (i) de la formulación del NCON y las restricciones de no-negatividad $x_e \geq 0$ del mismo. Goemans-Bertsimas demuestran que:

$$\frac{x^T c}{y^T c} \leq \left(2 - \frac{2}{|V_1|}\right) \left(\sum_{k=1}^p \frac{(\rho_k - \rho_{k-1})}{\rho_k}\right).$$

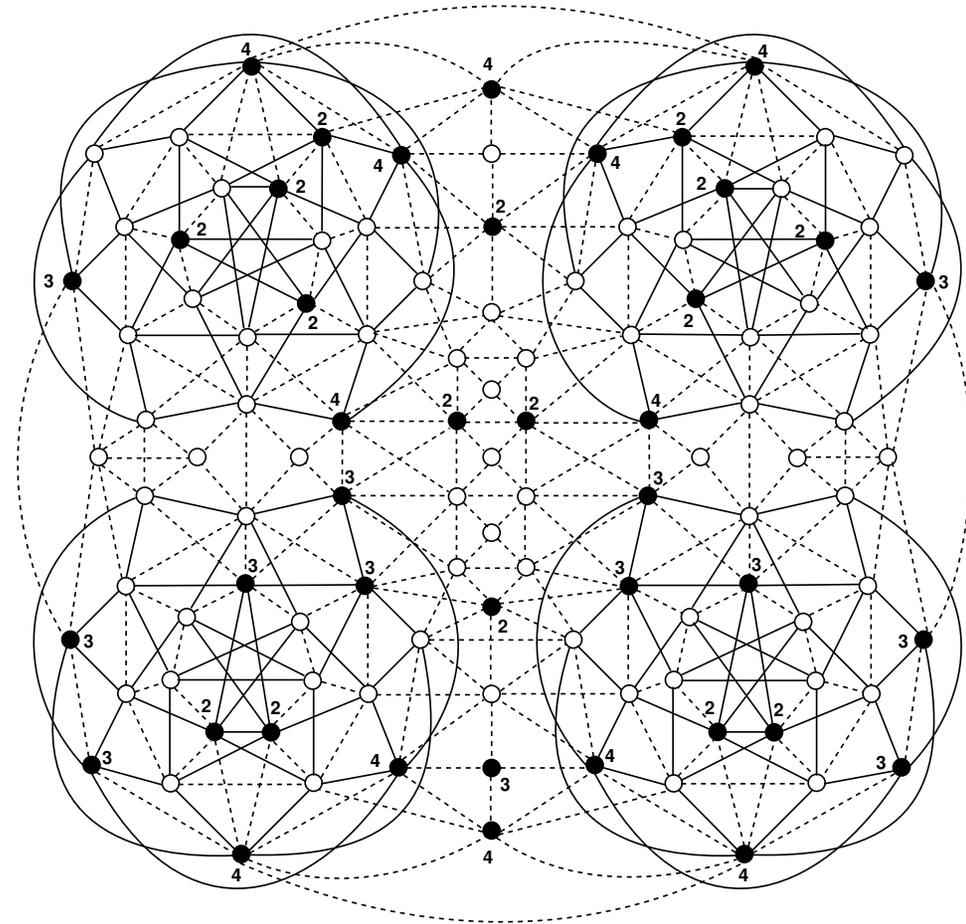
Diseño Topológico de Redes Robustas.

- LA SIGUIENTE RED ES UNA VERSIÓN SIMPLIFICADA DE UN HSODTN (*High Speed Optical Data Transmission Network*) CONECTANDO DIFERENTES PARTES DE UN PORTAAVIONES. EL MODELO ES UN $3NCON(G; r)$ DONDE LOS NODOS ROJOS SON NODOS TIPO 3 Y LOS NEGROS DE TIPO 0 (OPCIONALES).



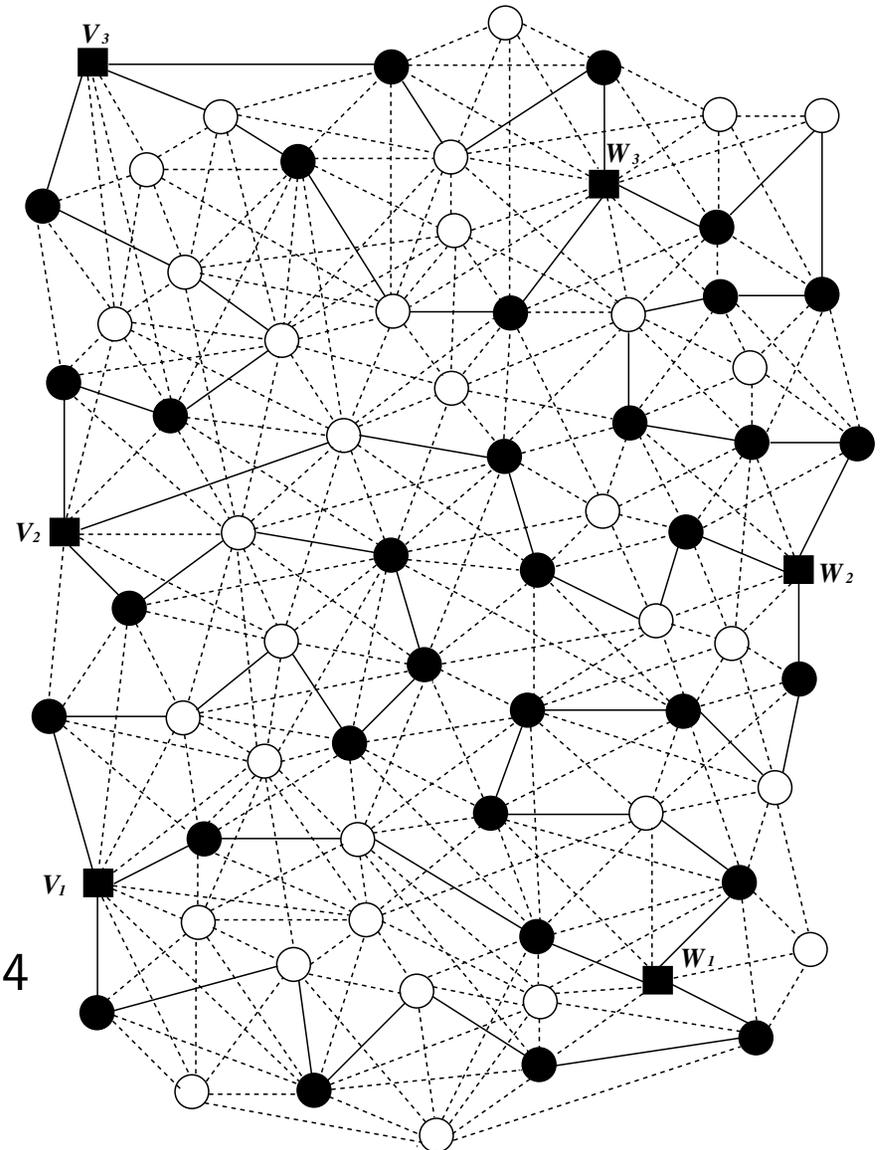
Diseño Topológico de Redes Robustas.

- LA SIGUIENTE INSTANCIA $4NCON(G; r)$ FUE DISEÑADA CONSTRUCTIVAMENTE APLICANDO PROPIEDADES TEÓRICAS QUE PRESERVAN LA OPTIMALIDAD DE UNA SOLUCIÓN FACTIBLE INICIAL.



Diseño Topológico de Redes Robustas.

- LA SIGUIENTE RED ES UNA INSTANCIA DEL PROBLEMA GSP – NC DISEÑADA CONSTRUCTIVAMENTE APLICANDO PROPIEDADES TEÓRICAS QUE PRESERVAN LA OPTIMALIDAD DE UNA SOLUCIÓN FACTIBLE INICIAL.



Diseño Topológico de Redes Robustas.

- Un caso particular muy estudiado de $\text{NCON}(G; r)$ (resp. $\text{ECON}(G; r)$) es cuando $r_i = k, \forall i \in V$ y además los costos de los arcos satisfacen desigualdad triangular. En la literatura este problema se conoce como: *The minimum-weight k -node-connected (resp. k -edge-connected) spanning network problem*. Denotados $\text{MW}k\text{NCSN}$ y $\text{MW}k\text{ECSN}$ respectivamente.
- En el caso $k = 2$, los problemas $\text{MW}2\text{NCSN}$ y $\text{MW}2\text{ECSN}$ son de especial interés en el diseño topológico de redes de fibra óptica.
- Veremos propiedades estructurales de las soluciones óptimas de los problemas $\text{MW}k\text{NCSN}$ y $\text{MW}k\text{ECSN}$, tanto para el caso $k = 2$ como en el caso $k \geq 3$.

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

Sea V un conjunto de nodos y $d(\cdot)$ una función de distancia simétrica y no negativa definida sobre $V \times V$ la cuál satisface la desigualdad triangular, i.e. para todo $u, v, w \in V$ se tiene:

- a) $d(u, u) = 0$,
- b) $d(u, v) \geq 0$,
- c) $d(u, v) = d(v, u)$,
- d) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

A $d(u, v)$ se le llama costo o largo de la arista (u, v) . Un subconjunto $E \subseteq V \times V$ define una red $G = (V, E)$ cuyo costo viene dado por $d(E) = \sum_{(u,v) \in E} d(u, v)$.

\Rightarrow CONSIDERAREMOS EL PROBLEMA DE CONSTRUIR UNA RED 2-CONEXA DE COSTO MÍNIMO QUE CUBRA EL CONJUNTO DE NODOS V .

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

Proposición 10 (Frederickson-Jájá 1982): *Para cualquier conjunto de nodos V con función de distancia $d(\cdot)$ definida sobre $V \times V$, entonces el costo óptimo del MW2ECSN es igual al costo óptimo del MW2NCSN.*

Dem. Sea G una solución óptima global del MW2ECSN. Supongamos que G no es factible para el MW2NCSN, i.e. existe un nodo $v \in V$ que es punto de articulación en G . Sean u y w nodos adyacentes a v en G pertenecientes a diferentes componentes conexas de $G \setminus v$. Consideremos el grafo: $\hat{G} = (G \setminus \{(u, v), (v, w)\}) \cup \{(u, w)\}$. Se cumple que:
I) u y w están en una misma componente 2-nodo-conexa maximal de \hat{G} . Puesto que como G es 2-arista-conexo, existe un camino p de u a w en G que no contiene las aristas $\{(u, v), (v, w)\}$ y por lo tanto $p \cup (u, w)$ es un ciclo de \hat{G} . Claramente \hat{G} es factible para el MW2ECSN.

II) $\text{COST}(\hat{G}) \leq \text{COST}(G)$ dado que:

$$\text{COST}(\hat{G}) = \text{COST}(G) - c_{uv} - c_{vw} + c_{uw} \stackrel{\text{Desigualdad } \Delta}{\leq} \text{COST}(G).$$

Repitiendo el procedimiento anterior obtendremos una solución \mathcal{G} factible para el MW2ECSN sin puntos de articulación y satisfaciendo la relación $\text{COST}(\mathcal{G}) \leq \text{COST}(G)$. Sea ahora H solución óptima del MW2NCSN; sabemos que $\text{COST}(G) \leq \text{COST}(H)$, con lo cual \mathcal{G} es solución óptima del MW2NCSN y $\text{COST}(\mathcal{G}) = \text{COST}(G)$ como queremos probar.

QED

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

Teorema 15 (Monma et al. 1990): *Para cualquier conjunto de nodos V con función de distancia $d(\cdot)$ definida sobre $V \times V$, existe un grafo de costo mínimo $G = (V, E)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

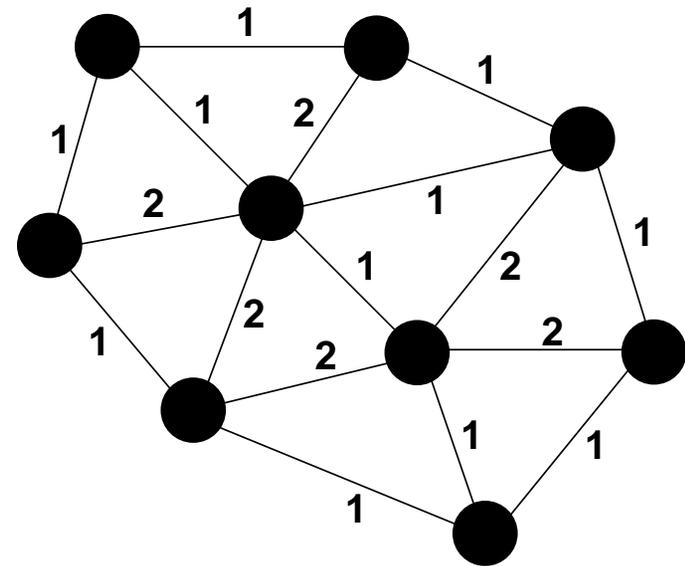
- a) cada nodo en G tiene grado 2 o 3.*
- b) eliminando cualquier arista o par de aristas de G surge una arista puente en una de las componentes conexas resultantes.*

⇒ EL SIGUIENTE EJEMPLO MUESTRA DIFERENTES ESTRUCTURAS
TOPOLÓGICAS PARA SOLUCIONES ÓPTIMAS DE UNA INSTANCIA
MW2NCSN/MW2ECSN.

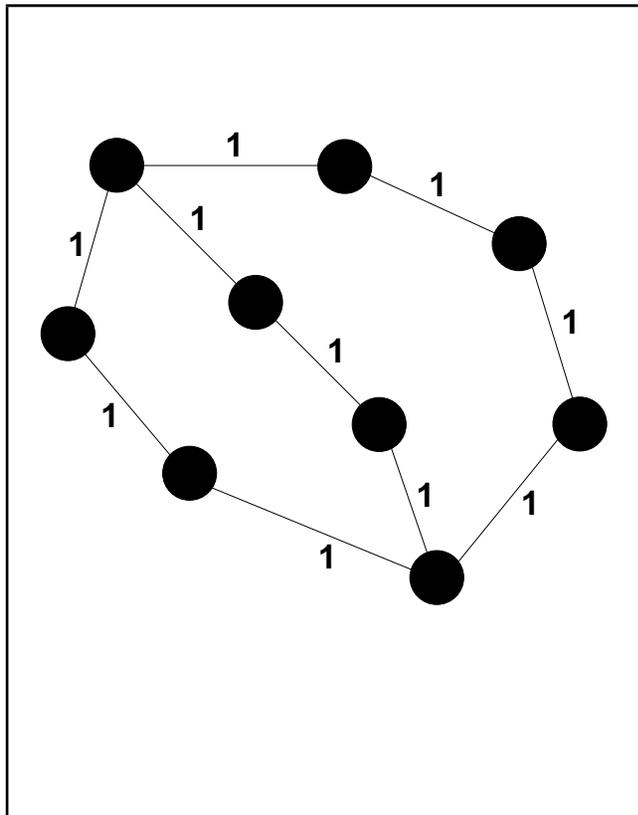
Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

- Consideremos el siguiente grafo cuyos costos satisfacen la desigualdad triangular. Las aristas que no figuran en el dibujo asumimos que tienen costo 2.

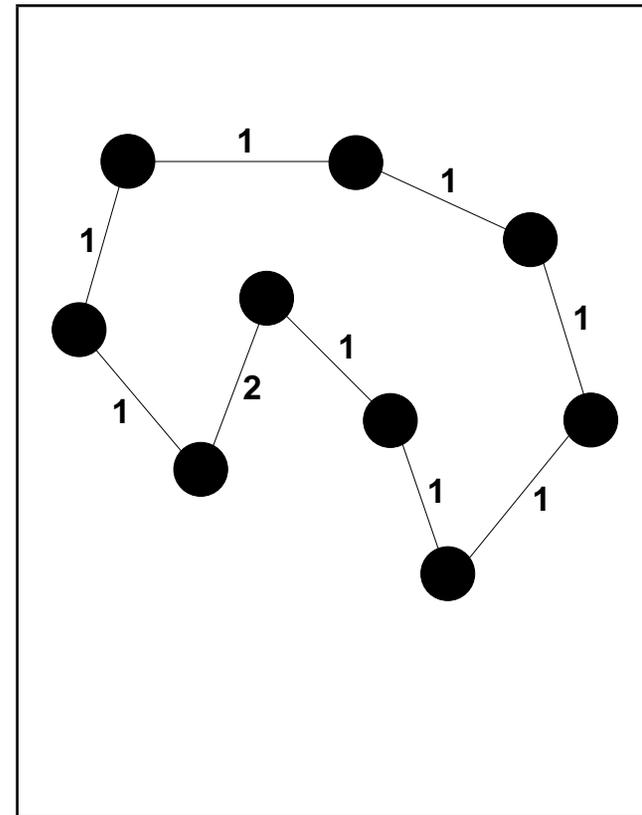
⇒ ¿CUÁL ES LA ESTRUCTURA TOPOLÓGICA DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA DEL MW2NCSN?.



Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.



(a) Solución óptima global.



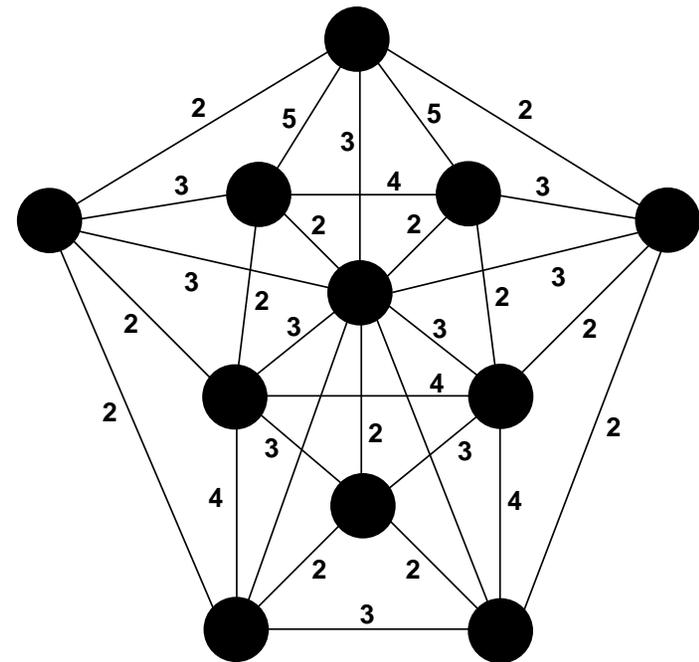
(b) Solución óptima global (forma de ciclo).

Figure 20: Soluciones globalmente óptimas de la instancia propuesta.

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

- En el siguiente grafo los costos satisfacen la desigualdad triangular. Las aristas que no figuran en el dibujo asumimos que tienen costo 3.

⇒ ¿CUÁL ES LA ESTRUCTURA TOPOLÓGICA DEL ÓPTIMO DEL MW2NCSN/MW2ECSN?.



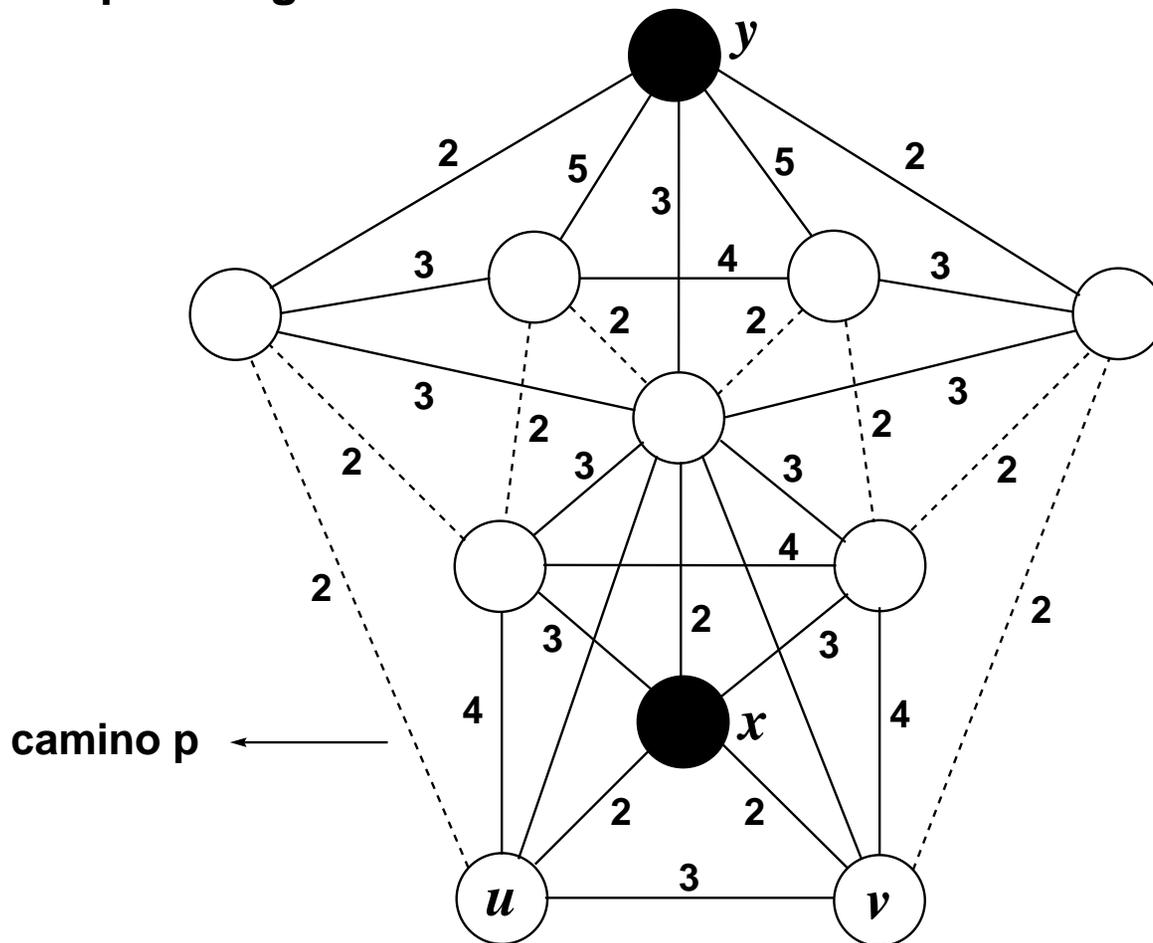
Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

Observación: *El costo óptimo del modelo anterior es superior a 22.*

Dem. El costo sería el mínimo posible si la solución fuera un ciclo donde todas las aristas tienen costo 2, i.e. con costo total $11 \times 2 = 22$. En la figura siguiente, los nodos blancos tienen exactamente dos aristas incidentes de costo 2, por lo tanto el camino p marcado en líneas quebradas necesariamente tendría que formar parte de un ciclo optimal en caso que existiese uno. Las unicas aristas de costo 2 con extremos en u y v son las aristas (u, x) y (v, x) , siendo $p - (u, x) - (x, v)$ un ciclo que excluye al nodo y . Por lo tanto no existe un ciclo hamiltoneano de costo 22 sobre el grafo dado.

QED

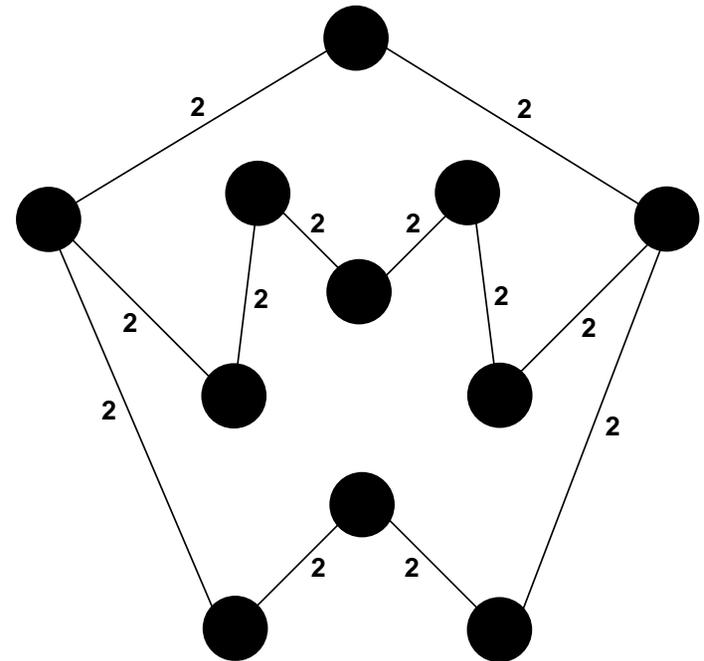
No existencia de ciclos hamiltoneanos
 óptimos globales:



Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

- Solución óptima del problema planteado; dos nodos tienen grado 3 y el resto de los nodos tienen grado 2.

⇒ NOTAR QUE EL NÚMERO DE NODOS DE GRADO 3 ES PAR.



Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

⇒ ¿EXISTEN TOPOLOGÍAS O CASOS PARTICULARES DEL MW2NCSN (RESP. MW2ECSN) DONDE LAS CONDICIONES (a) Y (b) DEL TEOREMA 15 CARACTERIZEN LA ESTRUCTURA DEL ÓPTIMO GLOBAL?.

- Si así fuera, se tendría para dichas especializaciones del problema, una caracterización del óptimo global mediante condiciones puramente estructurales (sin involucrar los costos de la red).

Definición: Para cualquier grafo G se define la *función de distancia canónica* $d(u, v)$ como el número de aristas en el camino más corto de u a v . Notar que $d(\cdot)$ es una función simétrica no-negativa y satisface la desigualdad triangular.

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

Teorema 16 (Monma et al. 1990): *Sea $G = (V, E)$ un grafo el cual satisface las siguientes condiciones:*

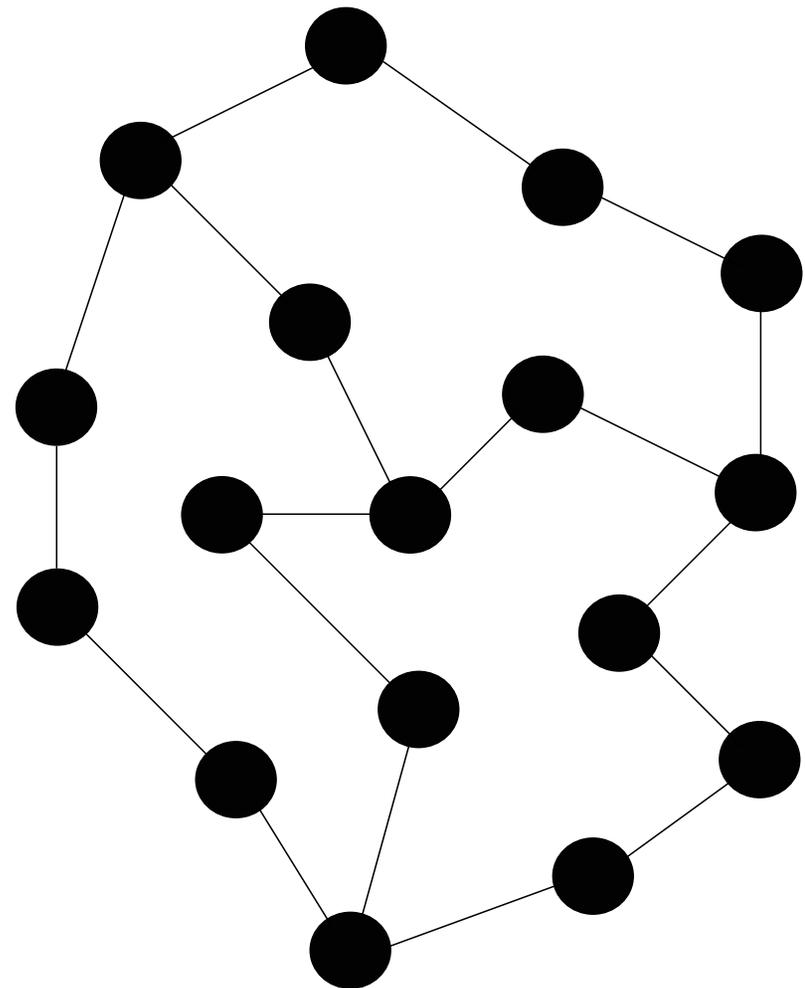
- i) G es 2-conexo.*
- ii) Cada nodo de G tiene grado 2 o 3.*
- iii) G es arista minimal, i.e., eliminando cualquier arista surge una arista puente.*
- iv) Eliminando cualquier par de aristas de G surge un puente en una de las componentes conexas resultantes.*

Entonces G es la única red de costo mínimo que cubre V para la función de distancia canónica.

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

- Consideremos el siguiente grafo G y la función de distancia canónica asociada al mismo.

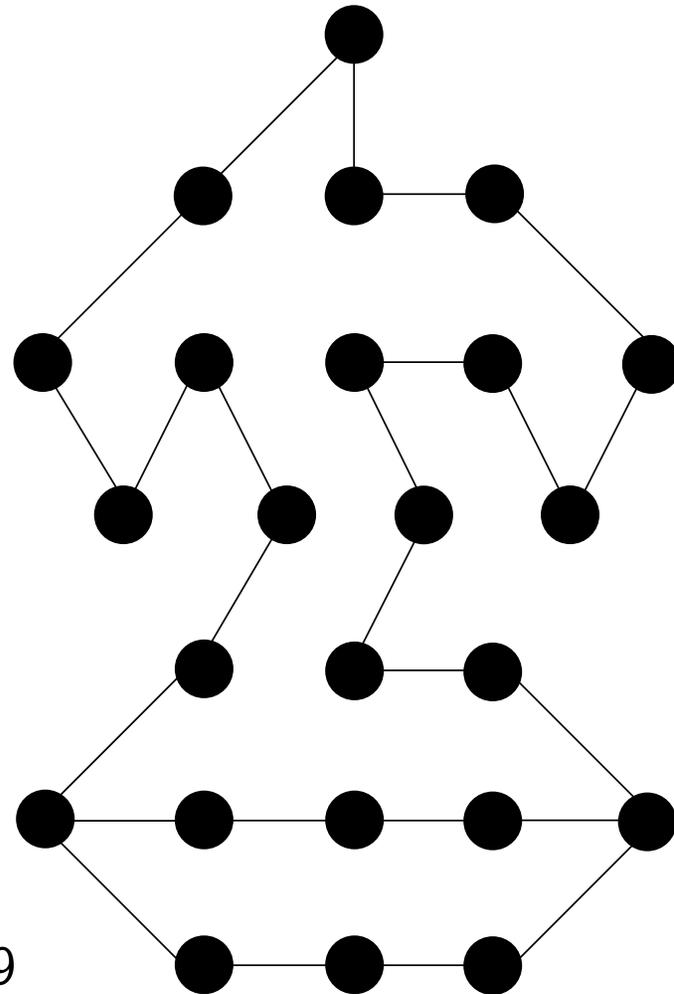
⇒ EN GRAFO EN SÍ MISMO REPRESENTA LA ESTRUCTURA TOPOLÓGICA ÓPTIMA DEL MW2NCSN/MW2ECSN CON MÉTRICA CANÓNICA.



Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

- Grafo H solución óptima del MW2NCSN/MW2ECSN con función de distancia canónica. Notar que dos nodos tienen grado 3 y el resto de los nodos tienen grado 2.

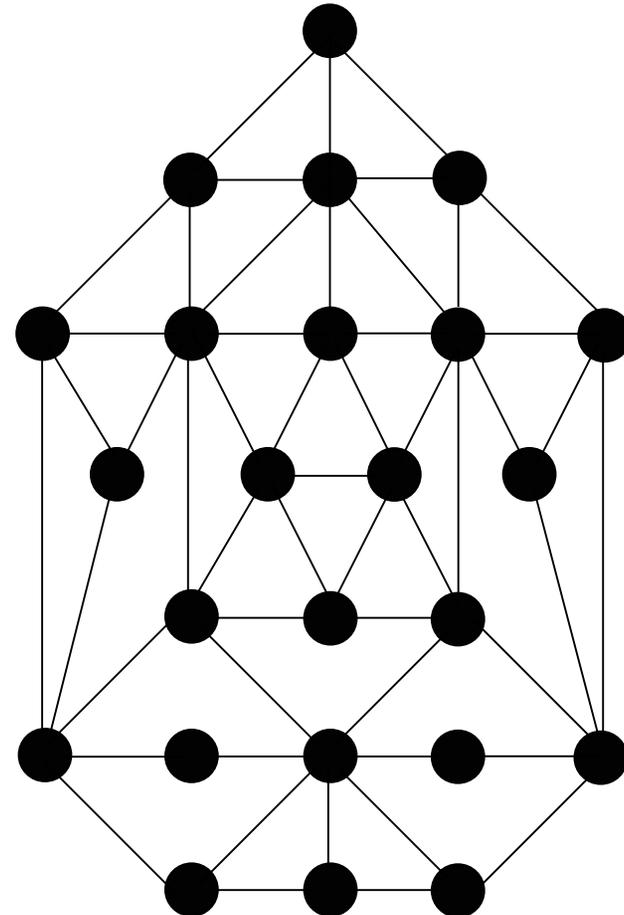
$\Rightarrow H$ SATISFACE LOS PUNTOS (i), (ii), (iii), Y (iv) DEL TEOREMA 16.



Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

- En el siguiente grafo las aristas presentes tienen costo 1 y las que no aparecen tienen costo 2.

⇒ ¿CUÁL ES LA ESTRUCTURA
TOPOLÓGICA DEL ÓPTIMO DEL
MW2NCSN/MW2ECSN?.



Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

Corolario 5 (Monma et al. 1990): *Cualquier grafo 2-conexo $G = (V, E)$ satisfaciendo las condiciones (a) y (b) del Teorema 15, y el cual no es un ciclo, contiene el grafo de la Figura 21 como un subgrafo nodo-inducido.*

Dem. Dado que G es 2-nodo-conexo contiene un ciclo C . Por condición (b) del Teorema 15, C contiene al menos tres nodos. Como G no es un ciclo en si mismo, debe existir al menos un nodo z que no esta en C . Por Lema de Berge, z está contenido en un ciclo común con cada nodo de C . Por condición (a) del Teorema 15, existen al menos dos nodos x e y en C con caminos hacia z que evitan C (salvo por los extremos x e y). La condición (b) del Teorema 15 implica que este subgrafo nodo-inducido debe ser de la forma de la Figura 21.

QED

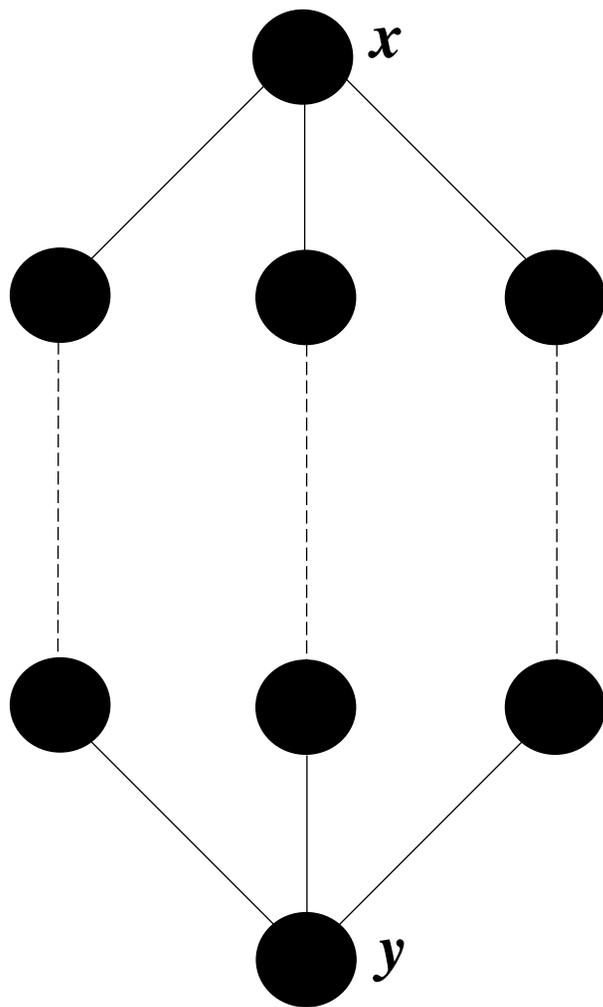


Figure 21: Grafo en el cual las líneas que se muestran son caminos de una o más aristas.

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

- Los Teoremas 15 y 16 son útiles para estudiar soluciones óptimas 2-nodo-conexas puesto que podemos restringir la atención a topologías de ciclos, grafos 2-nodo-conexos cúbicos con aristas sub-divididas, y grafos como el de la Figura 21. Estos son los únicos grafos 2-nodo-conexos minimales que no son ciclos.
- Otra consecuencia del Teorema 15 es que una solución óptima 2-conexa necesita no ser planar puesto que el grafo $K_{3,3}$ con todas las aristas sub-divididas dos o más veces satisface las condiciones (a) y (b). Esto contrasta con el caso de puntos en el plano donde si la métrica Euclidiana es usada, entonces siempre existe una solución planar optimal. (Claramente, la condición (a) excluye la posibilidad que un subgrafo sea homeomórfico a K_5).

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

Definición (Problema TSP): Dado un grafo $G = (V, E)$ y una función de costos $c : E \rightarrow R$ asociada a las aristas; el *Traveling Salesman Problem* (TSP) consiste en determinar el ciclo hamiltoniano de costo mínimo.

- El TSP es un problema NP-Completo y existen múltiples trabajos que lo abordan utilizando diferentes enfoques.
- Dada una instancia MW2NCSN/MW2ECSN, claramente los ciclos hamiltonianos son soluciones factibles al problema. En particular resulta de interés investigar que relación existe entre la solución óptima 2-conexa y la solución óptima del TSP asociado (i.e. el ciclo hamiltoniano de costo mínimo).

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

⇒ POR TEOREMA 16, SABEMOS QUE UN CICLO NO NECESARIAMENTE PRODUCE UN SOLUCIÓN ÓPTIMA 2-CONEXA.

Notación: Dado un conjunto de nodos V y una función de distancia $d(\cdot)$, denotaremos con $C_{opt}(V)$ al ciclo hamiltoniano de costo mínimo y con $TC_{opt}(V)$ a la solución óptima 2-conexa, y sus costos con $d(C_{opt}(V))$ y $d(TC_{opt}(V))$ respectivamente.

Teorema 17 (Monma et al. 1990): *Para cualquier conjunto de nodos V y función de distancia $d(\cdot)$ se satisface: $\frac{d(C_{opt}(V))}{d(TC_{opt}(V))} \leq \frac{4}{3}$. Además, esta cota puede ser aproximada arbitrariamente por la clase de grafos mostrada en la Figura 21 con $d(\cdot)$ la función de distancia canónica.*

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

- El Teorema 17 fue probado por Frederickson-Jájá (1982) para el caso en que $TC_{opt}(V)$ sea planar.
- Como $d(TC_{opt}(V)) \leq d(C_{opt}(V))$ cualquier cota inferior α para el radio del peor caso de una heurística \mathcal{H} respecto del ciclo optimal C_{opt} produce una cota inferior de al menos α para el radio del peor caso respecto de la solución optimal 2-conexa TC_{opt} .
- Una cota superior β para el radio del peor caso de una heurística \mathcal{H} respecto del ciclo optimal C_{opt} produce una cota superior de a lo sumo $\frac{4}{3}\beta$ (usando el Teorema 17) para el radio del peor caso respecto de la solución optimal 2-conexa TC_{opt} .

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

El *subtour polytope* de una instancia del problema TSP es el conjunto de todas las soluciones del siguiente sistema lineal:

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$\sum_{v \in V \setminus \{u\}} x(u, v) = 2, \quad \forall u \in V,$$

$$\sum_{u \in S, v \in V \setminus S} x(u, v) \geq 2, \quad \forall S \subset V \text{ tal que } |S| \geq 2.$$

Sea S_{opt} la solución del *subtour polytope* para el cual $d(x)$ es minimizada, y sea $d(S_{opt})$ su valor. Trivialmente sabemos que $d(S_{opt}) \leq d(C_{opt})$, dado que C_{opt} es la solución óptima entera a este problema. No obstante este valor provee una cota inferior para $d(TC_{opt})$.

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

Teorema 18 (W.H. Cunningham): *Para cualquier conjunto de nodos V y función de distancia $d(\cdot)$, se cumple $d(S_{opt}) \leq d(TC_{opt})$.*

- Una variante importante del MW2NCSN/MW2ECSN surge de especificar un subconjunto de nodos $T \subseteq V$ y buscar un subgrafo 2-conexo de costo mínimo que cubra T . Nodos de $V \setminus T$ pueden ser utilizados en la solución para reducir el costo global. Este variante del problema es conocida como *Steiner two-connected network problem*, denotada por STCNP.

Notación: Dado un conjunto de nodos V , una función de distancia $d(\cdot)$, y un subconjunto de nodos $D \subseteq V$, notaremos por $STC_{opt}(D, V)$ a la solución óptima del STCNP y por $d(STC_{opt}(D, V))$ a su costo.

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

Teorema 19 (Monma et al. 1990): *Para cualquier conjunto de nodos V , $D \subseteq V$ y función de distancia $d(\cdot)$, se satisface:*

$$\frac{d(TC_{opt}(D))}{d(STC_{opt}(D, V))} \leq \frac{4}{3}.$$

Dem. Sea $G = (W, E)$ una solución óptima del STCNP. Claramente, $T \subseteq W$. Es fácil ver que se satisface:

$$d(TC_{opt}(D)) \leq d(C_{opt}(D)) \leq d(C_{opt}(W)), \text{ y además}$$
$$d(STC_{opt}(D, V)) = d(STC(D, W)) = d(TC_{opt}(W)),$$

infiriendo la desigualdad:

$$\frac{d(TC_{opt}(D))}{d(STC_{opt}(D, V))} \leq \frac{d(C_{opt}(W))}{d(TC_{opt}(W))} \stackrel{\text{Por Teorema 17}}{\leq} \frac{4}{3},$$

como queríamos probar.

QED

- El STCNP es de la clase NP – Hard en grafos con métrica euclidiana. Sin embargo, es resoluble eficientemente para las clases de grafos outerplanares, serie-paralelos y grafos de Halin.
- De los Teoremas 17 y 19 podemos establecer una relación entre los costos de $C_{opt}(D)$ y $STC_{opt}(D, V)$ dada por el siguiente resultado.

Problemas MW2NCSN-MW2ECSN.

Proposición 11 (Monma et. al 1990): *Para cualquier conjunto de nodos V , $D \subseteq V$ y función de distancia $d(\cdot)$ se cumple:*

$$\frac{d(C_{opt}(D))}{d(STC_{opt}(D, V))} \leq \frac{16}{9}.$$

Dem. Por Teorema 17 sabemos que $\frac{d(C_{opt}(D))}{d(TC_{opt}(D))} \leq \frac{4}{3}$ y por Teorema 19 sabemos que $\frac{d(TC_{opt}(D))}{d(STC_{opt}(D, V))} \leq \frac{4}{3}$, de donde:

$$\frac{d(C_{opt}(D))}{d(STC_{opt}(D, V))} = \frac{d(C_{opt}(D)) \cdot d(TC_{opt}(D))}{d(TC_{opt}(D)) \cdot d(STC_{opt}(D, V))} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9},$$

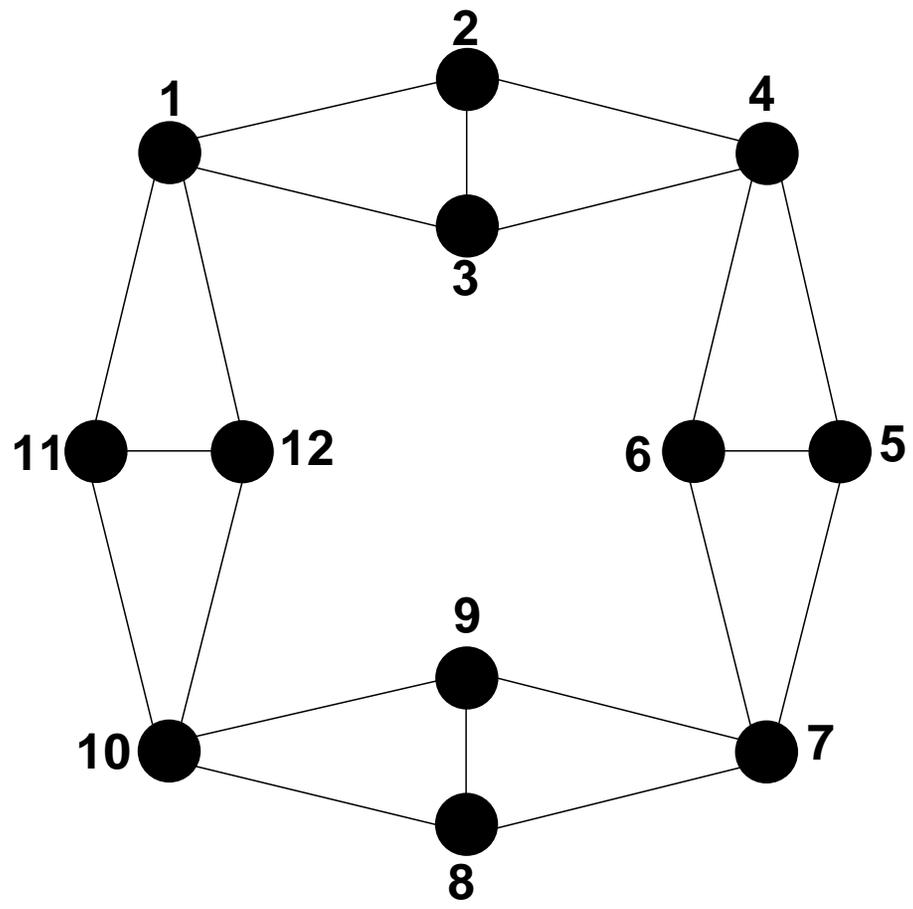
como se requería.

QED

Problemas MWkNCSN-MWkECSN.

⇒ ANALICEMOS AHORA MAYORES NIVELES DE CONECTIVIDAD.

- Dado un conjunto de nodos V con función de distancia $d(\cdot)$ el problema MWkNCSN (resp. MWkECSN) consiste en encontrar el subgrafo k -nodo-conexo (resp. k -arista-conexo) de costo mínimo que cubre V .
- Para $k = 2$ vimos que los costos de las soluciones óptimas de los problemas MW2NCSN y MW2ECSN son iguales.
- Para $k \geq 3$ la solución óptima del MWkECSN puede tener costo estrictamente menor que el costo óptimo del MWkNCSN. Por ejemplo, consideremos el grafo G 3-arista-conexo de la Figura 22 con función de distancia canónica definida por G .



163

Figure 22: Grafo 3-arista-conexo minimal.

Problemas MWkNCSN-MWkECSN.

Teorema 20 (Bienstock et al. 1990): *Para cualquier conjunto de nodos V con función de distancia $d(\cdot)$ y cualquier $k \geq 2$, existe un subgrafo $G = (V, E)$ k -arista-conexo de costo mínimo satisfaciendo las condiciones:*

I) Cada nodo de G tiene grado k o $k + 1$.

II) Eliminando $1, 2, \dots, o k$ aristas en G no todas las componentes resultantes son k -arista-conexas.

\Rightarrow Este resultado es una generalización del Teorema 15 para el problema MW2ECSN.

Problemas MWkNCSN-MWkECSN.

Propiedad 2 (Bienstock et al. 1990): *Contrariamente al caso $k = 2$, las condiciones (I) y (II) no caracterizan la clase de los subgrafos de cubrimiento k -arista-conexos de costo mínimo.*

Dem. Primeramente observemos que el grafo G de la Figura 22 es 3-arista-conexo y satisface las condiciones (I) y (II). Ahora bien, G no es la única solución de costo mínimo para cualquier conjunto de aristas con costos satisfaciendo la desigualdad triangular. Sin perder generalidad, asumiremos que $d(1, 3) \geq d(3, 4)$. Por desigualdad triangular tenemos que $d(3, 4) + d(4, 6) \geq d(3, 6)$. Sea $\mathcal{G} = (G \setminus \{(1, 3), (4, 6)\}) \cup \{(3, 6)\}$. Claramente \mathcal{G} es 3-arista-conexo y no incrementa el costo:

$$d(\mathcal{G}) = d(G) - d(1, 3) - d(4, 6) + d(3, 6) \leq d(G),$$

con lo cual \mathcal{G} también es optimal.

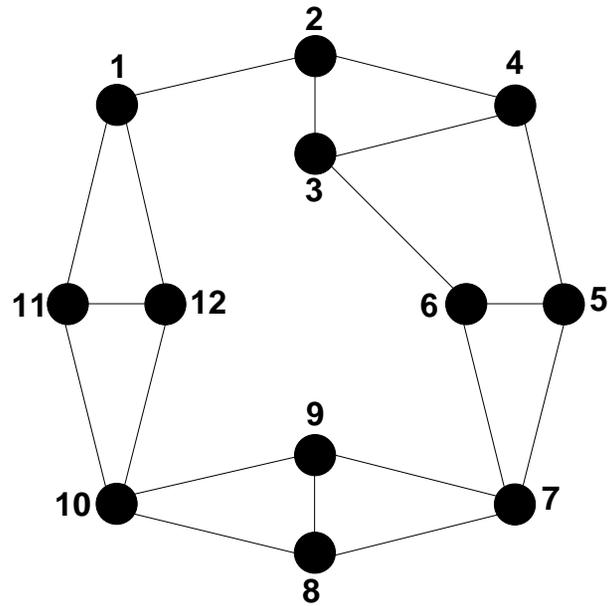


Figure 23: Grafo \mathcal{G} .

QED

Problemas MWkNCSN-MWkECSN.

⇒ PARA EL MWkNCSN SE GARANTIZA LA EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN ÓPTIMA GLOBAL SATISFACIENDO LA CONDICIÓN (II) Y TAMBIÉN (I) SI $|V| \geq 2k$.

Teorema 21 (Bienstock et al. 1990): *Para cualquier conjunto de nodos V con función de distancia $d(\cdot)$ y cualquier $k \geq 2$, existe un subgrafo $G = (V, E)$ k -nodo-conexo de costo mínimo satisfaciendo las condiciones:*

I') Si $|V| \geq 2k$ entonces cada nodo de G tiene grado k o $k + 1$.

II) Eliminando $1, 2, \dots, o k$ aristas en G no todas las componentes resultantes son k -nodo-conexas.

La condición (I') es rígida como lo muestra el siguiente resultado.

Problemas MWkNCSN-MWkECSN.

Lema 6 (Bienstock et al. 1990): Para cualquier $k \geq 4$ existe un grafo $G = (V, E)$ k -nodo-conexo con $|V| \geq 2k - 1$, máximo grado de $(2k - 2)$, y tal que es la única solución optimal para la función de distancia canónica definida por G .

Dem. Consideremos un grafo bipartito completo con conjunto de nodos $V_1 \cup V_2$ donde $|V_1| = |V_2| = k - 1$. Agregamos un nodo x que es adyacente a todos los otros nodos. Sea $G = (V, E)$ el grafo resultante. Se cumple que G es k -nodo-conexo con $|V| = 2k - 1$ y el grado de x igual a $2k - 2$. Veremos que G es la única solución óptima para la función de distancia canónica sobre G . Notar que todas las aristas en G tienen costo 1 y las que no están en G tienen costo 2. El grafo G tiene $(k^2 - 1)$ aristas y cualquier grafo k -nodo-conexo tiene al menos $(2k^2 - \frac{k}{2})$ aristas. Por lo tanto, a lo sumo $p \leq \frac{(k-2)}{2}$ aristas de costo 1 pueden ser eliminadas de G y

a lo sumo $\frac{p}{2}$ aristas de costo 2 pueden ser agregadas a G para obtener otra solución óptima 2-nodo-conexa. Dado que todos los nodos diferentes de x tienen grado igual a k , las aristas removidas deben tener todas un extremo en x ; sino, algún nodo del grafo resultante tendría grado menor a k . Como $V_1 \cup V_2$ forma un grafo bipartito completo, las aristas de costo 2 agregadas a G deben estar enteramente contenidas en V_1 o V_2 . Por lo tanto, el nuevo grafo no es k -nodo-conexo si cualesquiera $p \geq 1$ aristas de costo 1 son eliminadas. Así, G es la única solución k -nodo-conexo de costo mínimo.

QED

Problemas MWkVCSN-MWkECSN.

Teorema 22 (Bienstock et al. 1990): *Sea $G = (V, E)$ un grafo k -nodo-conexo minimal con $|V| \geq 2k$ y $k \geq 2$. Si $v \in V$ tiene grado al menos $k + 2$ entonces o bien:*

- i) Existe un lifting de v que es k -nodo-conexo, o:*
- ii) Existe un nodo $u \in V$ tal que para cualquier lifting G' en v existe un lifting en u de G' que es k -nodo-conexo.*

Bibliografía.

References

- [1] M. Stoer, “Design of Survivable Networks”, Lecture Notes in Mathematics, ISBN 3-540-56271-0, ISBN 0-387-56271-0, Springer-Verlag, (1996).