k-conectividad

- Un grafo G es k-nodo-conexo si no es desconectable con menos de k vértices y tiene más de k vértices.
- La nodo-conetividad de un grafo es el mayor k para el cual el grafo es k-nodo-conexo.

Ejemplo

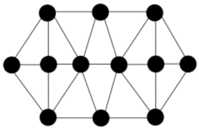
- La nodo-conectividad de K_n es $n - 1$ conexo y
- La nodo-conectividad $K_{n,m}$ es

k-conectividad

- Un grafo G es k-nodo-conexo si no es desconectable con menos de k vértices y tiene más de k vértices.
- La nodo-conetividad de un grafo es el mayor k para el cual el grafo es k-nodo-conexo.

Ejemplo

- La nodo-conectividad de K_n es $n-1$ conexo y
- La nodo-conectividad $K_{n,m}$ es $\min(n, m)$.
- La nodo-conectividad del grafo de la figura es:

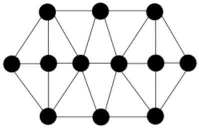


k-conectividad

- Un grafo G es k-nodo-conexo si no es desconectable con menos de k vértices y tiene más de k vértices.
- La nodo-conetividad de un grafo es el mayor k para el cual el grafo es k-nodo-conexo.

Ejemplo

- La nodo-conectividad de K_n es $n-1$ conexo y
- La nodo-conectividad $K_{n,m}$ es $\min(n,m)$.
- La nodo-conectividad del grafo de la figura es:



Teorema 5 (Tutte 1961):

Un grafo G es 3-nodo-conexo sii existen grafos $G_0, G_1, \ldots, G_n$ tales que:

i) $G_0 = K_4$ y $G_n = G$;

ii) G_{i+1} tiene una arista xy con $d(x), d(y) \geq 3$ y $G_i = G_{i+1}/xy$, para cada $i < n$.

Teorema de Menger

Teorema Local de Menger (Menger, 1927)

Dados dos vértices x, y no adyacentes de un grafo G, el menor cardinal de un conjunto de vértices que los separe es igual a la cantidad máxima $\lambda(x, y)$ de caminos internamente nodo disjuntos de x a y.

Teorema de Menger

Teorema Local de Menger (Menger, 1927)

Dados dos vértices x, y no adyacentes de un grafo G, el menor cardinal de un conjunto de vértices que los separe es igual a la cantidad máxima $\lambda(x, y)$ de caminos internamente nodo disjuntos de x a y.

Teorema de Menger (Whitney, 1932)

La nodo conectividad de un grafo es igual al menor $\lambda(x, y)$ para todo par de vértices x, y del grafo.

Demostración: Asumiendo la versión Local, si x e y no son adyacentes entonces $\lambda(x, y) \geq \kappa(G)$. Además existen x e y no adyacentes tales que $\lambda(x, y) = \kappa(G)$.

Teorema de Menger

Teorema Local de Menger (Menger, 1927)

Dados dos vértices x, y no adyacentes de un grafo G, el menor cardinal de un conjunto de vértices que los separe es igual a la cantidad máxima $\lambda(x, y)$ de caminos internamente nodo disjuntos de x a y.

Teorema de Menger (Whitney, 1932)

La nodo conectividad de un grafo es igual al menor $\lambda(x, y)$ para todo par de vértices x, y del grafo.

Demostración: Asumiendo la versión Local, si x e y no son adyacentes entonces $\lambda(x, y) \geq \kappa(G)$. Además existen x e y no adyacentes tales que $\lambda(x, y) = \kappa(G)$. Supongamos que $x \sim y$. Basta ver que $\kappa(G - xy) \geq \kappa(G) - 1$. Para K_n se cumple. Si G no es completo entonces $\kappa(G) \leq n - 2$. Sea S un conjunto separador de $G - xy$ que no lo sea de G, entonces $G - xy - S$ tiene dos componentes una con x y otra con y y alguna con más de dos nodos, por lo tanto $S + x$ o $S + y$ separa G por lo que $|S| + 1 \geq \kappa(G)$. $\square$

Teorema Local de Menger

Teorema Local de Menger (Menger, 1927)

Dados dos vértices x, y no adyacentes de un grafo G, el menor cardinal $\kappa(x, y)$ de un conjunto de vértices que los separe es igual a la cantidad máxima $\lambda(x, y)$ de caminos internamente nodo disjuntos de x a y.

Observación: Está claro que $\kappa(x, y) \geq \lambda(x, y)$. Debemos demostrar la desigualdad contraria.

Teorema Local de Menger

Teorema Local de Menger (Menger, 1927)

Dados dos vértices x, y no adyacentes de un grafo G, el menor cardinal $\kappa(x, y)$ de un conjunto de vértices que los separe es igual a la cantidad máxima $\lambda(x, y)$ de caminos internamente nodo disjuntos de x a y.

Observación: Está claro que $\kappa(x, y) \geq \lambda(x, y)$. Debemos demostrar la desigualdad contraria. Para ello demostraremos una versión para arcos:

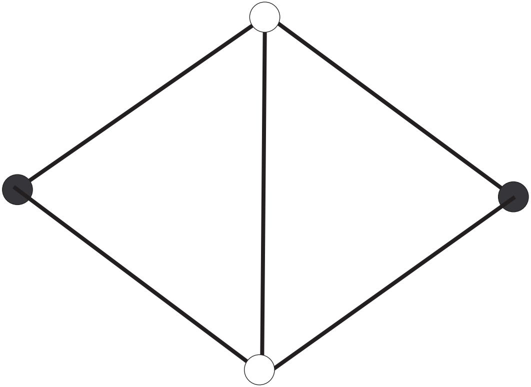
Teorema Local de Menger para aristas (Ford-Fulkerson, 1956)

Dados dos vértices x, y no adyacentes de un grafo dirigido G, el menor cardinal $\kappa'(x, y)$ de un conjunto de arcos que los separe es igual a la cantidad máxima $\lambda'(x, y)$ de caminos internamente arco disjuntos de x a y.

Reducciones

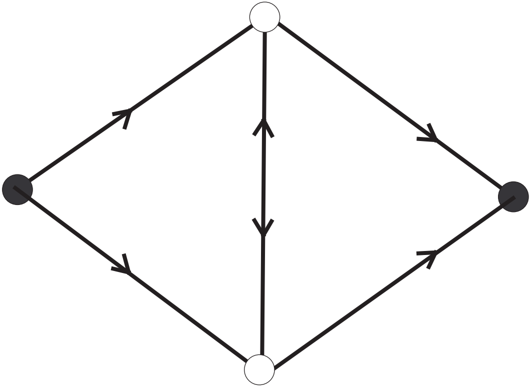
1. Grafos $\longrightarrow$ Grafos Dirigidos.
2. Nodos $\longrightarrow$ Arcos.

Reducciones



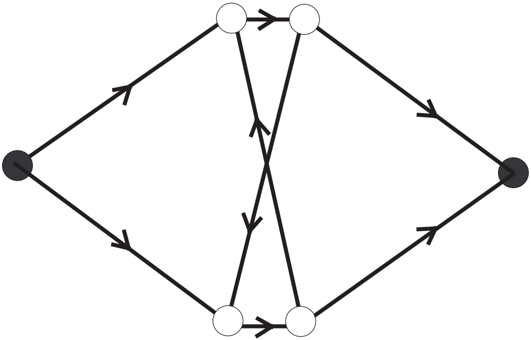
Queremos hallar dos caminos entre los nodos negros.

Reducciones



Pasamos al caso dirigido asignando direcciones.

Reducciones



De vértices a aristas: splitting de vértices.

Ford-Fulkerson

Teorema Local de Menger para aristas (Ford-Fulkerson, 1956)

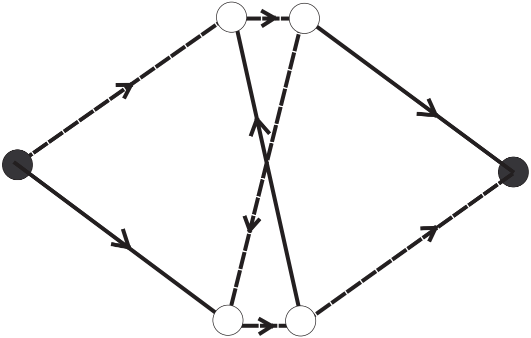
Dados dos vértices x, y no adyacentes de un grafo dirigido G, el menor cardinal $\kappa'(x, y)$ de un conjunto de arcos que los separe es igual a la cantidad máxima $\lambda'(x, y)$ de caminos internamente arco disjuntos de x a y.

"Min-cut max-flow Theorem" (Ford-Fulkerson, 1956)

El flujo máximo entre dos nodos de un grafo dirigido es igual al corte de menor capacidad.

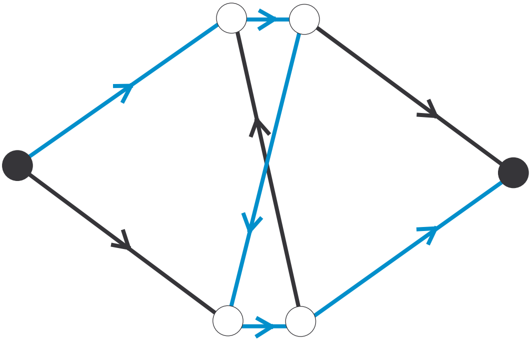
Demostración del teorema local: si ponemos capacidades 1, todo flujo será un conjunto de caminos arco disjuntos y un corte un conjunto separador.

Reducciones



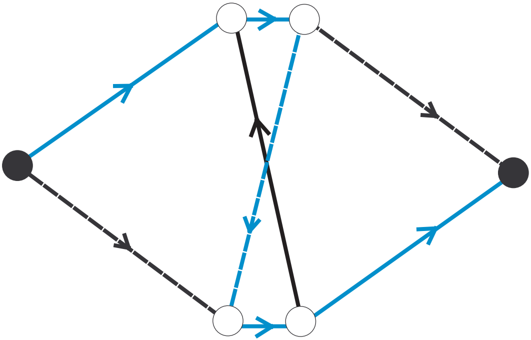
Elegimos un camino cualquiera

Reducciones



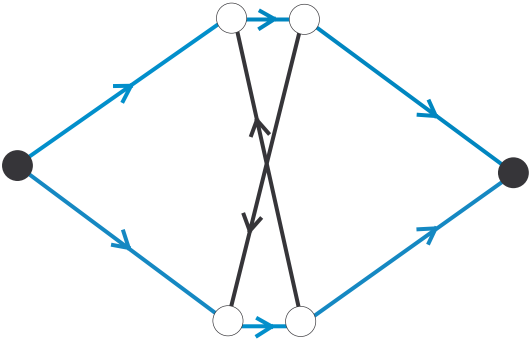
Aumento el flujo

Reducciones



Elegimos un camino aumentable

Reducciones



Aumento el flujo y disminuyo según el caso

Algoritmo de Ford y Fulkerson

Definición de Flujo sobre una Red

Sea $R = (V, A, s, t, c)$ una red con vértices V, arcos $A \subset V \times V$, capacidades $c : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$, y $s, t \in V$. Diremos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es un flujo en R si:

$$f(a) \leq c(a) \qquad \forall a \in A \text{ y}$$

$$\sum_{a \rightsquigarrow v} f(a) = \sum_{v \rightsquigarrow a} f(a). \qquad \forall v \in V \setminus \{s, t\}.$$

Algoritmo de Ford y Fulkerson

Definición de Flujo sobre una Red

Sea $R = (V, A, s, t, c)$ una red con vértices V, arcos $A \subset V \times V$, capacidades $c : A \to \mathbb{R}^+$, y $s, t \in V$. Diremos que $f : A \to \mathbb{R}^+$ es un flujo en R si:

$$f(a) \leq c(a) \qquad \forall a \in A \text{ y}$$

$$\sum_{a \rightsquigarrow v} f(a) = \sum_{v \rightsquigarrow a} f(a). \qquad \forall v \in V \setminus \{s, t\}.$$

Definición de camino aumentable (“augmenting path”)

Una secuencia de vértices-arcos $v_0, a_1, v_1, \ldots, a_n, v_n$ es un camino aumentable, si:

1. $a_i = v_{i-1}v_i$ o $a_i = v_iv_{i-1}$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
2. $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$.
3. O bien $a_i = v_{i-1}v_i$ y $f(a_i) < c(a_i)$ o bien $f(a_i) > 0$.

Llamaremos gap de a_i a $g(a_i) = c(a) - f(a)$ si $a_i = v_{i-1}v_i$ y a $f(a_i)$ sino.

Algoritmo de Ford y Fulkerson

Lemma

Si $P : s = v_0, a_1 \ldots, a_n, v_n = t$ es un camino aumentable y $g = \min gap(a_i)$, entonces

$$f' : A \to \mathbb{R}^+$$

definido por

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \notin P, \\ f'(a) = f(a) + g & \text{si } a = v_i v_{i+1}, \\ f'(a) = f(a) - g & \text{si } a = v_{i+1} v_i \ . \end{cases}$$

es un flujo. Lo llamaremos flujo aumentado de f según P.

Algoritmo de Ford y Fulkerson

- Comenzar con un flujo f nulo ($f(a) = 0 \quad \forall a$).
- **Mientras** exista un camino aumentable P **hacer** $f \leftarrow$ flujo aumentado de f según P.

Algoritmo de Ford y Fulkerson

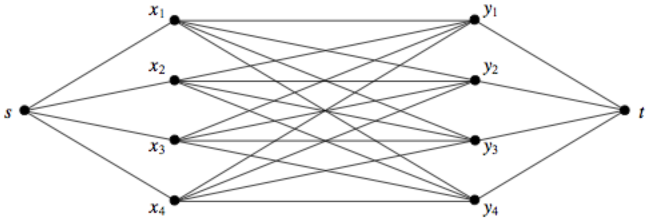
¿Porqué funciona el Algoritmo de FF?

- Terminación: Si las capacidades son racionales termina, pero si son reales puede no terminar.
- Complejidad: $O(m|f|)$
  - $O(mn^2)$ Camino aumentable más corto: (Dinic 1970, Edmonds-Karp, 1972). Termina siempre aún con capacidades reales.
  - $O(m \log n \log |f|)$ Camino aumentable más ancho: (Edmonds-Karp, 1972).
  - $O(m \log U)$ con $U = \max c(a)$ "Algoritmo escalable" (Dimic 1973).
  - $O(\sqrt{m}n^2)$ "Puch Relabel Algorithm" (Goldberg-Tarjan 1988).

Algoritmo de Ford y Fulkerson

¿Porqué funciona el Algoritmo de FF?

- Terminación: Si las capacidades son racionales termina, pero si son reales puede no terminar.
- Complejidad: $O(m|f|)$
  - $O(mn^2)$ Camino aumentable más corto: (Dinic 1970, Edmonds-Karp, 1972). Termina siempre aún con capacidades reales.
  - $O(m \log n \log |f|)$ Camino aumentable más ancho: (Edmonds-Karp, 1972).
  - $O(m \log U)$ con $U = \max c(a)$ "Algoritmo escalable" (Dimic 1973).
  - $O(\sqrt{m}n^2)$ "Puch Relabel Algorithm" (Goldberg-Tarjan 1988).



Con $\sigma = (\sqrt{5} - 1)/2$ con $c(x_i y_i) = \sigma^i$ $i = 0, 1, 2$, $c(x_4 y_4) = \sigma^2$ y $1/(1 - \sigma)$ para los demás arcos

Algoritmo de Ford y Fulkerson

Teorema

Cuando el algoritmo de FF termina[a] *el flujo hallado es máximo e igual al corte de capacidad mínima.*

Demostración: Sea $A = \{x : \text{existe un camino aumentable de } s \text{ a } x\}$.
Entonces

- La capacidad $c(A, \bar{A}) = |f|$.
- Por lo tanto f es máximo y $c(A, \bar{A})$ mínima pues:
  - $\forall g, B : s \in B, t \notin B, \quad |g| \leq c(B, \bar{B})$.
  - por lo tanto $|g| \leq c(A, \bar{A}) = |f| \leq c(B, \bar{B})$.

[a] Si se elige el camino más corto (Edmonds-Karp) el algoritmo siempre termina.

Corolario

La cantidad máxima de caminos arco disjuntos de x a y es igual a la cantidad mínima de arcos de un conjunto que separe x de y.

Otros problemas relacionados

- Flujo entre conjuntos conjuntos y puntos.
- k-caminos disjuntos.

Otros problemas relacionados

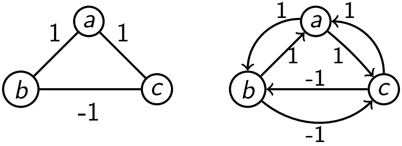
- Flujo entre conjuntos conjuntos y puntos.
- *k*-caminos disjuntos.
- Multiflujo y capacidades enteras.

Otros problemas relacionados

- Flujo entre conjuntos conjuntos y puntos.
- k-caminos disjuntos.
- Multiflujo y capacidades enteras.
- Flujo máximo de costo mínimo: conjunto máximo de caminos de costo mínimo.

Dirigido vs no dirigido

- En el grafo no dirigido no hay ciclos negativos mientras que en el



dirigido si:
- El problema de hallar dos caminos nodo disjuntos entre dos pares de nodos es NP-completo en el caso dirigido pero polinomial en el caso no dirigido.

Bibliografía I

R. Diestel.
Graph Theory.
Springer-Verlag New York 1997.

D.B. West.
Introduction to Graph Theory.
Published by Prentice Hall, 1996.

C.H. Papadimitriou y K. Steiglitz.
Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity.
Dover Publications, Inc., 1998.

David R. Karger
6.854J / 18.415J Advanced Algorithms. 2005.
Mit Open Courseware:
http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-854JFall-2005/CourseHome/index.htm

Michel Goemans
6.854J / 18.415J Advanced Algorithms. 2008.
Mit Open Courseware:
http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-854JFall-2008/CourseHome/index.htm

Michel Goemans
18.997 Topics in Combinatorial Optimization.
Mit Open Courseware:
http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-854JFall-2008/CourseHome/index.htm

Bibliografía II

Comentarios sobre la bibliografía: La demostración del teorema de Tutte pueden encontrarla en el Diestel. La demostración del teorema de Menger a partir del teorema Local de Menger la saqué del West. La reducciones Grafo a grafos dirigidos y nodos a arcos es estándar y la pueden ver por ejemplo en la lección 22 de Topics in Combinatorial Optimization. Las definiciones y la demostración del teorema de Ford-Fulkerson las obtuve sobre todo de Goemans 2008, pero en todos los textos se utiliza una red "residual" G_f que yo no utilicé a fin de simplificar la exposición. Los problemas relacionados pueden verse del West (flujo entre conjuntos), el Diestel (k-caminos disjuntos) el Topics in Comb. Opt. (Multiflujo)) y el Goemans Advances Algortihms (Flujo máximo de costo mínimo). El análisis de la complejidad de los algoritmos puede encontrarse en Papadimitrou y en Karger (Lecture 8)