

# Estabilidad

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control  
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)  
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República  
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales  
Primer semestre - 2025

# Contenido

- 1 **Puntos de equilibrio**
  - Sistemas lineales
- 2 **Teoría de Lyapunov**
- 3 **Sistemas perturbados**
- 4 **Aplicación**

## Sistemas dinámicos

**Sistema autónomo:**  $\dot{x} = \tilde{f}(x)$

- El campo no depende explícitamente del tiempo.
- Las conclusiones del análisis no dependen del instante inicial considerado.

## Sistemas dinámicos

### Sistema a estudio

- Nos focalizaremos en el análisis del sistema autónomo  $\dot{x} = f(x)$ .
- Esto equivale a suponer que no hay entradas o que las mismas ya han sido diseñadas.
- Denotaremos por  $f^t(x)$  el tiempo  $t$  de la trayectoria del sistema que en  $t = 0$  pasa por el punto  $x$ .
- **Asumiremos en general que se cumplen las condiciones para que las trayectorias estén definidas para todo tiempo real.**

## Puntos de equilibrio

### Puntos de equilibrio

- Interesan los **puntos de equilibrio** del sistema, es decir, puntos de velocidad nula:

$$0 = f(x) \quad , \quad \forall t \geq 0$$

- En los modelos matemáticos, usualmente los puntos de equilibrio representan la situación de funcionamiento deseada.
- En particular, nos interesa la **estabilidad** de los puntos de equilibrio.

## Ejemplos

### Sistema eléctrico de potencia

Ecuación de swing (segunda cardinal en el eje de una máquina generadora):

$$\begin{cases} \dot{\delta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -D\omega + P_m - P_e \end{cases}$$

En el equilibrio, la frecuencia de la red eléctrica se encuentra en su valor nominal ( $50Hz$  para Uruguay).

## Ejemplo

## Presas-predador (Lotka-Volterra)

La población de zorros ( $z$ ) crece al comer a los conejos ( $c$ ) y decrece por mortandad. Los conejos tienen comida de sobra, crecen rápidamente y decrecen si se los comen los zorros.

$$\begin{cases} \dot{c} = r_1 c - b_1 c z = c(r_1 - b_1 z) \\ \dot{z} = -r_2 z + b_2 c z = -z(r_2 - b_2 c) \end{cases}$$

con constantes positivas. Entonces existe una pareja  $(c^*, z^*)$  (no trivial) en la que ambas especies coexisten. La dinámica natural serán oscilaciones en torno a ese equilibrio (se verá en los ejercicios de práctico).

## Sistemas dinámicos

### Estabilidad

Consideremos un punto de equilibrio  $x_0$  tal que  $0 = f(x_0)$

- Decimos que  $x_0$  es **estable** si se cumple que para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que para todo tiempo positivo:

$$\forall \|x - x_0\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|f^t(x) - x_0\| < \epsilon$$

- Decimos que  $x_0$  es **asintóticamente estable** si es **estable** y además existe  $\delta > 0$  tal que

$$\forall \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f^t(x) - x_0\| = 0$$

- Si el origen atrae todos los puntos del espacio, decimos que tenemos **estabilidad global** o **en grande**. Sino, hablamos de atracción local.
- Decimos que  $x_0$  es **inestable** si no es estable.



# Estabilidad

## Observaciones

- La convergencia asintótica no implica la estabilidad.
- Para la inestabilidad, alcanza con encontrar una trayectoria que se vaya.
- La definición de estabilidad no constituye en sí misma una condición de testeo, salvo para sistemas muy particulares.

# Sistemas lineales

$$\dot{x} = Ax$$

En este caso, las trayectorias tienen la siguiente expresión analítica:

$$f^t(x) = e^{At}x = \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} e^{\lambda_i t} R_{ik} \right] x$$

donde  $\lambda_i$  son los  $r$  distintos autovalores de  $A$ , con multiplicidad respectiva  $m_i$  y  $R_{ik}$  son matrices relacionadas con la forma canónica de Jordan de  $A$ .

# Sistemas lineales

$$\dot{x} = Ax = \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} e^{\lambda_i t} R_{ik} \right] x$$

- El origen es estable si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real no positiva y los autovalores en el eje imaginario son simples.
- El origen es un atractor (global) si y sólo si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa. Decimos que  $A$  es Hurwitz.
- Si hay algún autovalor de  $A$  con parte real positiva, entonces el origen es inestable.

# Linealización

Consideremos el sistema  $\dot{x} = f(x)$ , con  $f(\bar{x}) = 0$  y

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) \quad , \quad z = x - \bar{x}$$

## Teorema de Hartman-Großman

Si ningún autovalor de  $A$  tiene parte real nula, el sistema  $\dot{z} = Az$  describe el comportamiento del sistema  $\dot{x} = f(x)$  **localmente alrededor de  $\bar{x}$** .

# Linealización

## Corolarios

- Si  $A$  tiene un autovalor con parte real positiva, entonces  $\bar{x}$  es inestable.
- Si  $A$  es Hurwitz,  $\bar{x}$  es asintóticamente estable.
- Si hay algún autovalor en el eje imaginario, entonces hay que recurrir al **Teorema de la variedad centro** (no lo vemos en el curso, pero puede verse en el Khalil).

# Linealización

## Ejemplos

- Para el sistema  $\dot{x} = x^2$ , el origen es inestable. La linealización en  $x = 0$  da

$$\dot{z} = 0$$

# Linealización

## Ejemplos

- La ecuación de Rayleigh:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \epsilon x_2 \left[1 - \frac{1}{3}x_2^2\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\epsilon}{3}x_2^3 \end{bmatrix}$$

- La linealización en el origen resulta ser inestable para todo  $\epsilon$ .

## Funciones de energía

### Péndulo simple

Consideremos el siguiente sistema

$$\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{g}{l}\right) \sin(x_1) \end{cases}$$

donde el origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio.

Consideremos la función  $V(x) = \left(\frac{g}{l}\right) [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2}x_2^2$ .

- $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0$ , para todo  $x \neq 0$  en  $(-2\pi, 2\pi) \times \mathcal{R}$ .



## Funciones de energía

### Péndulo simple

Calculemos la **derivada** de la función  $V$  **a lo largo de las trayectorias**:

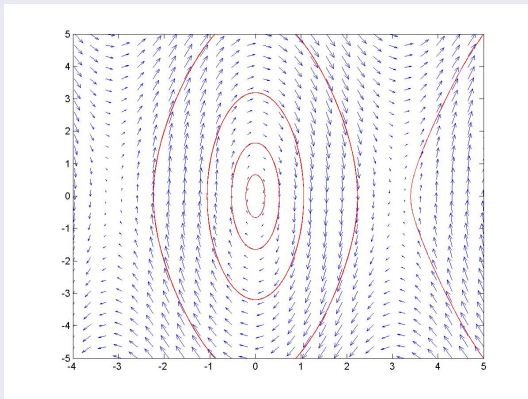
$$\dot{V}(x) = \left. \frac{dV(f^t(x))}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V[f^h(x)] - V(x)}{h} = \nabla V(x) \cdot f(x)$$

$$\dot{V}(x) = \sin(x_1) \cdot \dot{x}_1 + x_2 \cdot \dot{x}_2 = \left(\frac{g}{l}\right) x_2 \sin(x_1) - \left(\frac{g}{l}\right) x_2 \sin(x_1) = 0$$

- La función  $V(x)$  es constante sobre las trayectorias del sistema.
- Las curvas de nivel  $\{V(x) = c\}$  contienen las trayectorias.

# Funciones de energía

## Péndulo simple



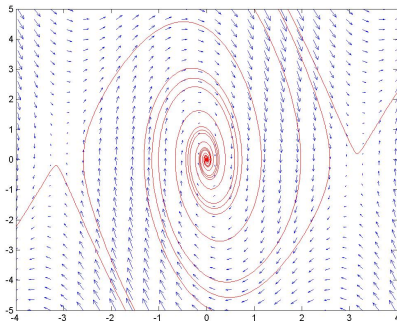
- El origen es un punto de equilibrio estable, no asintótico.

# Funciones de energía

## Péndulo simple

Agregamos fricción:  $\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & -Dx_2 - \left(\frac{g}{l}\right) \sin(x_1) \end{cases}$

Tenemos que:  $\dot{V}(x) = -Dx_2^2 \leq 0$  (observemos que no depende de  $x_1$ , por lo que decimos que es semidefinida negativa como función de  $(x_1, x_2)$ ).



## Teoremas de Estabilidad

### Teorema de Lyapunov (1892)

Consideremos el sistema  $\dot{x} = f(x)$ , con  $f(0) = 0$  y un entorno del origen  $D \subset \mathcal{R}^n$ . Sea  $V : D \rightarrow [0, +\infty)$  de clase  $C^1$ , tal que

$$V(0) = 0 \quad , \quad V(x) > 0 \quad , \quad x \in D \setminus \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

Entonces, el origen es un punto de equilibrio estable.

Si además  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $x \in D \setminus \{0\}$ , entonces la estabilidad es asintótica.

## Teoremas de Estabilidad

### Ejemplos

- En el caso del péndulo, con fricción o sin ella, la función de energía es **localmente** una función de Lyapunov para estabilidad, pues  $\dot{V}(x) \leq 0$ .
- Para el oscilador armónico  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$ , la función  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  verifica  $\dot{V}(x) = 0$ , lo que asegura la estabilidad.

## Teoremas de Estabilidad

### Idea de la prueba

- Un conjunto es **positivamente invariante** si toda trayectoria que se inicia en él, se mantiene dentro de él para todo tiempo futuro.
- Sea  $c$  una constante positiva y consideremos el conjunto cerrado

$$\Omega_c = \{x \in D \mid V(x) \leq c\}$$

- La condición  $\dot{V}(x) \leq 0$  asegura que ese conjunto es positivamente invariante, pues la única manera de salir de él es aumentando el valor de  $V$ .
- Si  $\Omega_c$  es acotado, es compacto y **captura** todas las trayectorias que entran en él.

## Teoremas de Estabilidad

### Idea de la prueba

- Para probar la estabilidad, sea  $\epsilon > 0$ . Hay que ver que existe  $\delta > 0$  tal que todas las trayectorias que se inician a menos de  $\delta$  del origen, se mantienen dentro de la bola de radio  $\epsilon$  ( $B_\epsilon$ ).
- La idea es ver que se puede meter un  $\Omega_c$  dentro de  $B_\epsilon$ .
- Eso sale de usar la continuidad de  $V$ . Sea  $m = \min_{\|x\|=\epsilon} V(x)$  y  $0 < c < m$ , entonces:

$$\exists \delta > 0 / \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|V(x)\| < c$$

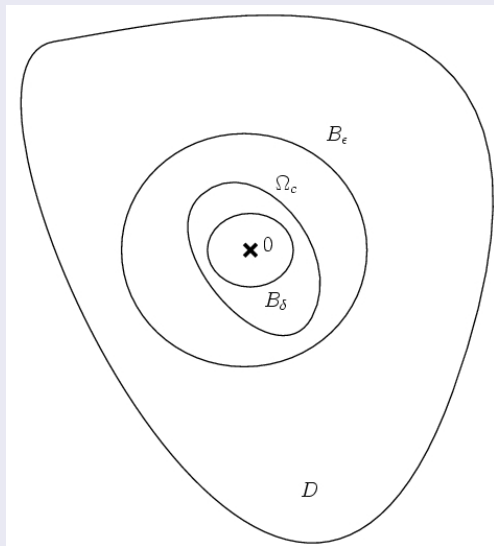
entonces, si

$$x \in B_\delta \Rightarrow x \in \Omega_c \subset B_\epsilon$$

- Como  $\Omega_c$  es positivamente invariante,  $f^t(x) \in \Omega_c \subset B_\epsilon$  para todo  $t \geq 0$ .
- Resumiendo, si  $\|x\| \leq \delta$ , entonces  $\|f^t(x)\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$ .

# Teoremas de Estabilidad

## Idea de la prueba





## Teoremas de Estabilidad

### Idea de la prueba

- Para la estabilidad asintótica, hay que usar la definición de signo  $\dot{V}(x)$ .
- Como fuera del origen la derivada es negativa, la función  $V$  es estrictamente decreciente.
- Hay que ver que efectivamente llega al origen y no puede decrecer asintóticamente hacia un valor positivo.

### Opcional:

Leer con atención la prueba en el Khalil.

## Teoremas de Estabilidad

### Estabilidad global

- El teorema de Lyapunov puede asegurar la estabilidad global.
- Para ello, debe poder asegurarse que para todo  $c > 0$ , el conjunto  $\Omega_c$  es acotado.
- Decimos que  $V$  es **radialmente no acotada** si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$$

- Entonces  $\forall c > 0$ ,  $\Omega_c = \{x \mid V(x) < c\}$  es acotado.

## Teoremas de Estabilidad

### Región de atracción

- Cuando el origen es un atractor, se define la **región de atracción** como el conjunto de puntos atraídos por él:

$$R = \left\{ x \in \mathcal{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(x) = 0 \right\}$$

- $R$  es abierto, conexo y su frontera está constituida por trayectorias.
- Observemos que los conjuntos  $\Omega_c$  acotados están siempre incluidos en  $R$  y pueden servir como *estimadores* de  $R$ .

## Teoremas de Estabilidad

### Teorema de Cetaev

Existen varios teoremas que manejando la idea de Lyapunov, aseguran la inestabilidad. El Teorema de Cetaev es un ejemplo:

*Consideremos el sistema  $\dot{x} = f(x)$ , con  $f(0) = 0$  y un entorno del origen  $D \subset \mathcal{R}^n$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathcal{R}$  de clase  $C^1$ , tal que  $V(0) = 0$  y dado  $\epsilon > 0$  arbitrario, existe  $x_0$ ,  $\|x_0\| < \epsilon$ , tal que  $V(x_0) > 0$  y  $\dot{V}(x_0) > 0$ . Entonces, el origen es un punto de equilibrio inestable.*

## Teoremas de Estabilidad

### Ejemplo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(k^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(k^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \Rightarrow \dot{V}(x) = \|x\|^2 (k^2 - \|x\|^2)$$

Entonces, para  $k \neq 0$ ,  $V$  y  $\dot{V}$  son estrictamente positivas en un entorno del origen (sin incluirlo).

## Teoremas de Estabilidad

En el ejemplo del péndulo con fricción, nuestro conocimiento del sistema nos permitió asegurar la estabilidad asintótica del origen. Sin embargo, Lyapunov sólo nos asegura la estabilidad a secas, ya que  $\dot{V} \leq 0$ .

Hay un resultado que nos permite ir un poco más allá.

### Teorema de LaSalle

Consideremos el sistema  $\dot{x} = f(x)$ , con  $f(0) = 0$  y un entorno del origen  $D \subset \mathcal{R}^n$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathcal{R}$  de clase  $C^1$ , tal que  $V(0) = 0$  ( $V$  puede tomar cualquier signo). Sea  $\Omega$  un conjunto compacto, que contiene al origen, positivamente invariante y tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ . Definamos el conjunto

$$E = \left\{ x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0 \right\}$$

Entonces, todas las trayectorias en  $\Omega$  convergen al **conjunto invariante más grande** contenido en  $E$ .

## Teoremas de Estabilidad

### Ejemplos

- Para el caso del péndulo con fricción, los puntos que anulan la derivada tienen velocidad nula:

$$\dot{V}(x) = -Dx_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \Rightarrow E = \{x_2 = 0\}$$

- Los únicos invariantes en el eje  $x_2 = 0$  son los equilibrios  $x_1 = 0$  y  $x_1 = \pi$ , por lo que toda trayectoria (en la región donde vale LaSalle) va a parar a alguno de esos dos puntos.
- Si usamos la información de que el origen es localmente estable y  $(\pi, 0)^T$  es inestable (silla), por LaSalle, y con la función de Lyapunov que ya teníamos, concluimos que es asintóticamente estable.

## Teoremas de Estabilidad

### Teoremas recíprocos

- Existen numerosas versiones de resultados recíprocos al Teorema de Lyapunov.
- Son del estilo siguiente: asumiendo que se cumple la estabilidad asintótica, se prueba la existencia de una función de Lyapunov.
- No podemos dejar de mencionar el resultado de José Luis Massera (1949), que es una de las versiones recíprocas más generales.
- Los resultados recíprocos tienen mucha utilidad teórica.



## Funciones de Lyapunov cuadráticas

$$\dot{x} = Ax$$

Las funciones de Lyapunov *naturales* para sistemas lineales son formas cuadráticas. Consideremos la matrix  $P = P^T > 0$  y la forma cuadrática  $V(x) = x^T P x$ .

- Entonces

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x (= 2x^T A^T P x) \\ &= x^T (A^T P + P A) x\end{aligned}$$

- Para ser una función de Lyapunov, debe ser  $Q = -(A^T P + P A) > 0$

### Teorema

Dada  $Q = Q^T > 0$ , existe una matrix  $P = P^T > 0$ , solución de la ecuación  $-Q = A^T P + P A$  si y sólo si  $A$  es Hurwitz.

## Linealización

## Resultado importante

- Ya vimos que Si  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$  es Hurwitz,  $\bar{x}$  es localmente asintóticamente estable.
- Si  $P = P^T > 0$ ,  $A^T P + PA = -Q < 0$ , entonces  $V(x) = x^T P x$  es una función de Lyapunov para el sistema no lineal. Veámoslo:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = f^T(x) P x + x^T P f(x)$$

Escribamos  $f(x) = Ax + g(x)$ , con  $g$  de segundo orden,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (A^T P + PA)x + g^T(x) P x + x^T P g(x) = \\ & x^T (A^T P + PA)x + 2x^T P g(x) \leq x^T (A^T P + PA)x + 2\|x\| \cdot \|P\| \cdot \|g(x)\| \end{aligned}$$

# Linealización

## Resultado importante

Recordemos que:

- $x^T(A^T P + PA)x = -x^T Qx$
- $\lambda_{\min}(Q) \cdot \|x\|^2 \leq x^T Qx \leq \lambda_{\max}(Q) \cdot \|x\|^2$
- $\|P\| = \lambda_{\max}(P)$
- Existe  $\gamma$  positivo, arbitrariamente chico, tal que si  $\|x\|$  es suficientemente chica:  $\|g(x)\| \leq \gamma \cdot \|x\|$ .

Entonces  $\dot{V}(x) \leq x^T(A^T P + PA)x + 2\|x\| \cdot \|P\| \cdot \|g(x)\|$

$$\leq -\lambda_{\min}(Q) \cdot \|x\|^2 + 2\gamma \lambda_{\max}(P) \cdot \|x\|^2 < 0 \text{ si } \boxed{\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}}$$

## Péndulo con fricción

$$\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -Dx_2 - \left(\frac{g}{l}\right) \sin(x_1) \end{cases}$$

- Usando la función de energía

$$V(x) = \left(\frac{g}{l}\right) [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2}x_2^2$$

probamos que era estable. La derivada es  $\dot{V}(x) = -Dx_2^2$ .

- Probar que eligiendo  $P > 0$  adecuada, la siguiente función de Lyapunov asegura la estabilidad asintótica:

$$V(x) = \left(\frac{g}{l}\right) [1 - \cos(x_1)] + x^T P x$$

(ver Ejemplo 3.4 del Khalil)

## Sistemas perturbados

### Introducción

- Consideremos el sistema no lineal  $\dot{x} = f(x)$ , con  $x = 0$  un punto de equilibrio **asintóticamente estable**.
- Asumiremos que conocemos una función de Lyapunov  $V(x)$  para el sistema, que cumple
  - $0 \leq k_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq k_2 \|x\|^2$
  - $\dot{V}(x) \leq -k_3 \|x\|^2$
  - $\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right\| \leq k_4 \|x\|$
 con  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  constantes positivas.
- Por ejemplo, para un sistema lineal, con  $A$  Hurwitz y  $V(x) = x^T P x$ :
  - $0 \leq \underline{\lambda}(P) \|x\|^2 \leq V(x) \leq \bar{\lambda}(P) \|x\|^2$
  - $\dot{V}(x) \leq -\underline{\lambda}(Q) \|x\|^2$
  - $\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right\| \leq 2\bar{\lambda}(P) \|x\|$

## Sistemas perturbados

Consideremos el **sistema perturbado**:

$$\dot{x} = f(x) + \delta(x)$$

$$\delta(0) = 0$$

- El origen sigue siendo un punto de equilibrio del sistema perturbado.
- Bajo ciertas propiedades de  $\delta(x)$ ,  $V(x)$  es una función de Lyapunov para el sistema perturbado.
- Por ejemplo:  $\|\delta(x)\| \leq \gamma\|x\|$ ,  $\gamma > 0$ , con  $\gamma$  suficientemente pequeño. Probarlo!!!

## Sistemas perturbados

### Ejemplo

- Si  $f(0) = 0$ , entonces podemos escribir

$$\dot{x} = Ax + \delta(x)$$

con  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$  y  $\delta(x) = f(x) - Ax$ .

- Sabemos que en un entorno del origen,

$$\|\delta(x)\| \leq \gamma\|x\| \quad \text{pues} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|\delta(x)\|}{\|x\|} = 0$$

ya que  $\delta(x)$  es un término de segundo orden.

- Entonces, una función de Lyapunov cuadrática sirve localmente para el sistema no lineal y la podemos usar para estimar la región de atracción.

## Sistemas perturbados

$$\delta(0) \neq 0$$

- La situación aquí es más complicada, pues el origen no es un equilibrio del sistema perturbado.
- Si la perturbación es acotada ( $\|\delta(x)\| \leq \gamma$ ), entonces la función  $\dot{V}$  seguirá cumpliendo que es negativa **lejos** del origen.
- Esto implica que las trayectorias se acercarán a un entorno del origen **positivamente invariante**.
- Esto lleva al concepto de **ultimate boundedness**.



## Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

### Planteo del problema

- Un sistema eléctrico de potencia se puede modelar mediante una ecuación algebraico-diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y, \lambda) \\ 0 &= g(x, y, \lambda) \end{cases}$$

donde

- $x$  es el estado del sistema (posición y velocidad de los rotores de las máquinas generadoras, estados de controladores),
- $y$  denota los módulos y las fases de las tensiones fasoriales en los nodos de la red eléctrica,
- $f$  representa los balances de potencia en los ejes de las máquinas,
- $g$  representa la red eléctrica (leyes de Kirchoff)
- $\lambda$  representa ciertos parámetros de control o de perturbación.

## Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

### Falla en el sistema

- Cuando se produce una falla en el sistema, cambian las funciones  $f$  y  $g$ .
- Posibles fallas: salida de una línea por cortocircuito, salida de un generador, desconexión de una carga, etc.

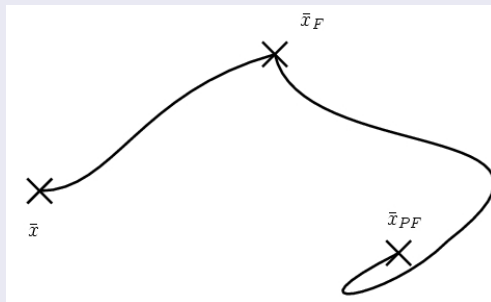
## Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

### Falla en el sistema

- Supongamos que el sistema se encuentra operando de manera aceptable.
- En el modelo, esto equivale a que el sistema está en un punto de equilibrio asintóticamente estable.
- Al producirse una falla, cambia el sistema y ese punto de equilibrio pasa a ser la condición inicial del nuevo sistema.
- Usaremos la siguiente notación:
  - Sistema pre-falla:  $f$  y  $g$
  - Sistema durante la falla:  $f_F$  y  $g_F$
  - Sistema post-falla:  $f_{PF}$  y  $g_{PF}$
- Definamos
  - Equilibrio pre-falla:  $\bar{x}$ .
  - Estado en el instante en que se limpia la falta:  $\bar{x}_F$ .
  - Equilibrio post-falla:  $\bar{x}_{PF}$ .

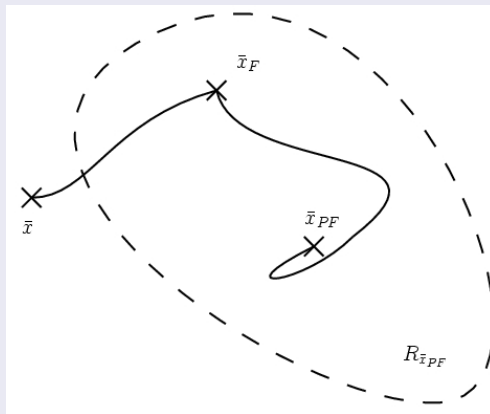
# Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

## Esquema de la situación



# Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

## Situación deseada



## Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

### Conclusión

- $\bar{x}_F$ , el estado del sistema en el instante de reparación de la falla, debe estar dentro de la región de atracción del punto de operación deseado para el sistema post-falla.
- Conociendo el tipo de falla, conocemos  $f_{PF}$  y podemos simular el sistema durante la falla.
- Si tenemos una estimación de  $R_{\bar{x}_{PF}}$  (por ejemplo, conocemos una función de Lyapunov), podemos determinar un **tiempo máximo de despeje** para la falta.