

Estabilidad

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales
Primer semestre - 2025

Contenido

- 1 **Puntos de equilibrio**
 - Sistemas lineales
- 2 **Teoría de Lyapunov**
- 3 **Sistemas perturbados**
- 4 **Aplicación**

Sistemas dinámicos

Sistema autónomo: $\dot{x} = \tilde{f}(x)$

- El campo no depende explícitamente del tiempo.
- Las conclusiones del análisis no dependen del instante inicial considerado.

Sistemas dinámicos

Sistema a estudio

- Nos focalizaremos en el análisis del sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$.
- Esto equivale a suponer que no hay entradas o que las mismas ya han sido diseñadas.
- Denotaremos por $f^t(x)$ el tiempo t de la trayectoria del sistema que en $t = 0$ pasa por el punto x .
- **Asumiremos en general que se cumplen las condiciones para que las trayectorias estén definidas para todo tiempo real.**

Puntos de equilibrio

Puntos de equilibrio

- Interesan los **puntos de equilibrio** del sistema, es decir, puntos de velocidad nula:

$$0 = f(x) \quad , \quad \forall t \geq 0$$

- En los modelos matemáticos, usualmente los puntos de equilibrio representan la situación de funcionamiento deseada.
- En particular, nos interesa la **estabilidad** de los puntos de equilibrio.

Ejemplos

Sistema eléctrico de potencia

Ecuación de swing (segunda cardinal en el eje de una máquina generadora):

$$\begin{cases} \dot{\delta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -D\omega + P_m - P_e \end{cases}$$

En el equilibrio, la frecuencia de la red eléctrica se encuentra en su valor nominal ($50Hz$ para Uruguay).

Ejemplo

Presas-predador (Lotka-Volterra)

La población de zorros (z) crece al comer a los conejos (c) y decrece por mortandad. Los conejos tienen comida de sobra, crecen rápidamente y decrecen si se los comen los zorros.

$$\begin{cases} \dot{c} = r_1 c - b_1 c z = c(r_1 - b_1 z) \\ \dot{z} = -r_2 z + b_2 c z = -z(r_2 - b_2 c) \end{cases}$$

con constantes positivas. Entonces existe una pareja (c^*, z^*) (no trivial) en la que ambas especies coexisten. La dinámica natural serán oscilaciones en torno a ese equilibrio (se verá en los ejercicios de práctico).

Sistemas dinámicos

Estabilidad

Consideremos un punto de equilibrio x_0 tal que $0 = f(x_0)$

- Decimos que x_0 es **estable** si se cumple que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo tiempo positivo:

$$\forall \|x - x_0\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|f^t(x) - x_0\| < \epsilon$$

- Decimos que x_0 es **asintóticamente estable** si es **estable** y además existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f^t(x) - x_0\| = 0$$

- Si el origen atrae todos los puntos del espacio, decimos que tenemos **estabilidad global** o **en grande**. Sino, hablamos de atracción local.
- Decimos que x_0 es **inestable** si no es estable.

Estabilidad

Observaciones

- La convergencia asintótica no implica la estabilidad.
- Para la inestabilidad, alcanza con encontrar una trayectoria que se vaya.
- La definición de estabilidad no constituye en sí misma una condición de testeo, salvo para sistemas muy particulares.

Sistemas lineales

$$\dot{x} = Ax$$

En este caso, las trayectorias tienen la siguiente expresión analítica:

$$f^t(x) = e^{At}x = \left[\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} e^{\lambda_i t} R_{ik} \right] x$$

donde λ_i son los r distintos autovalores de A , con multiplicidad respectiva m_i y R_{ik} son matrices relacionadas con la forma canónica de Jordan de A .

Sistemas lineales

$$\dot{x} = Ax = \left[\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} e^{\lambda_i t} R_{ik} \right] x$$

- El origen es estable si todos los autovalores de A tienen parte real no positiva y los autovalores en el eje imaginario son simples.
- El origen es un atractor (global) si y sólo si todos los autovalores de A tienen parte real negativa. Decimos que A es Hurwitz.
- Si hay algún autovalor de A con parte real positiva, entonces el origen es inestable.

Linealización

Consideremos el sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f(\bar{x}) = 0$ y

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) \quad , \quad z = x - \bar{x}$$

Teorema de Hartman-Großman

Si ningún autovalor de A tiene parte real nula, el sistema $\dot{z} = Az$ describe el comportamiento del sistema $\dot{x} = f(x)$ **localmente alrededor de \bar{x}** .

Linealización

Corolarios

- Si A tiene un autovalor con parte real positiva, entonces \bar{x} es inestable.
- Si A es Hurwitz, \bar{x} es asintóticamente estable.
- Si hay algún autovalor en el eje imaginario, entonces hay que recurrir al **Teorema de la variedad centro** (no lo vemos en el curso, pero puede verse en el Khalil).

Linealización

Ejemplos

- Para el sistema $\dot{x} = x^2$, el origen es inestable. La linealización en $x = 0$ da

$$\dot{z} = 0$$

Linealización

Ejemplos

- La ecuación de Rayleigh:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \epsilon x_2 \left[1 - \frac{1}{3}x_2^2\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\epsilon}{3}x_2^3 \end{bmatrix}$$

- La linealización en el origen resulta ser inestable para todo ϵ .

Funciones de energía

Péndulo simple

Consideremos el siguiente sistema

$$\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{g}{l}\right) \sin(x_1) \end{cases}$$

donde el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio.

Consideremos la función $V(x) = \left(\frac{g}{l}\right) [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2}x_2^2$.

- $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$, para todo $x \neq 0$ en $(-2\pi, 2\pi) \times \mathcal{R}$.

Funciones de energía

Péndulo simple

Calculemos la **derivada** de la función V **a lo largo de las trayectorias**:

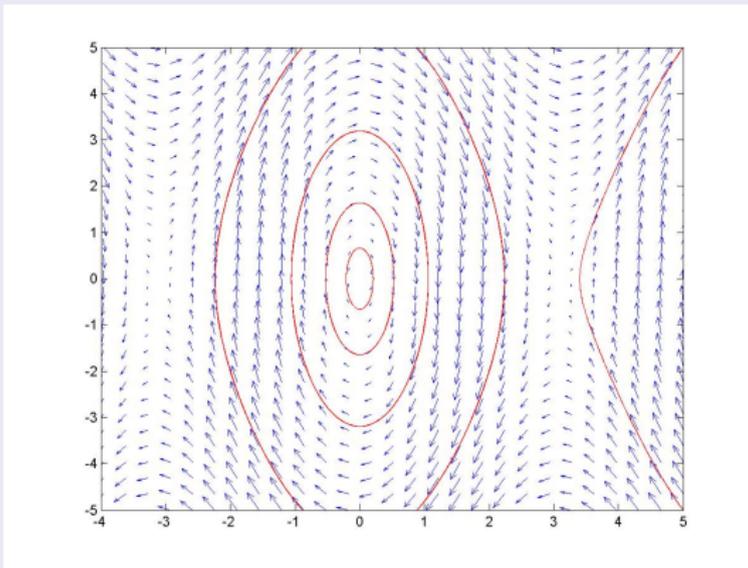
$$\dot{V}(x) = \left. \frac{dV(f^t(x))}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V[f^h(x)] - V(x)}{h} = \nabla V(x) \cdot f(x)$$

$$\dot{V}(x) = \sin(x_1) \cdot \dot{x}_1 + x_2 \cdot \dot{x}_2 = \left(\frac{g}{l}\right) x_2 \sin(x_1) - \left(\frac{g}{l}\right) x_2 \sin(x_1) = 0$$

- La función $V(x)$ es constante sobre las trayectorias del sistema.
- Las curvas de nivel $\{V(x) = c\}$ contienen las trayectorias.

Funciones de energía

Péndulo simple



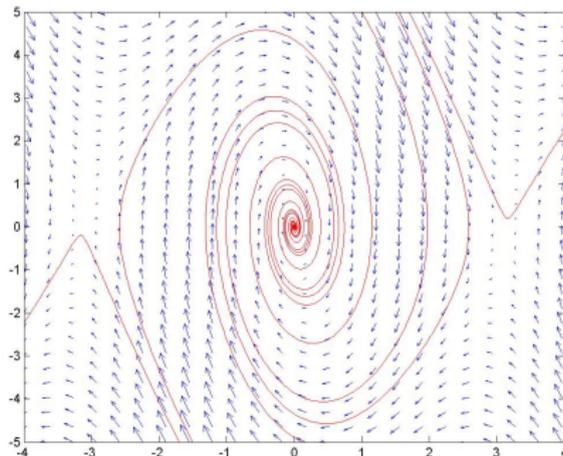
- El origen es un punto de equilibrio estable, no asintótico.

Funciones de energía

Péndulo simple

Agregamos fricción: $\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & -Dx_2 - \left(\frac{g}{l}\right) \sin(x_1) \end{cases}$

Tenemos que: $\dot{V}(x) = -Dx_2^2 \leq 0$ (observemos que no depende de x_1 , por lo que decimos que es semidefinida negativa como función de (x_1, x_2)).



Teoremas de Estabilidad

Teorema de Lyapunov (1892)

Consideremos el sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f(0) = 0$ y un entorno del origen $D \subset \mathcal{R}^n$. Sea $V : D \rightarrow [0, +\infty)$ de clase C^1 , tal que

$$V(0) = 0 \quad , \quad V(x) > 0 \quad , \quad x \in D \setminus \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

Entonces, el origen es un punto de equilibrio estable.

Si además $\dot{V}(x) < 0$, $x \in D \setminus \{0\}$, entonces la estabilidad es asintótica.

Teoremas de Estabilidad

Ejemplos

- En el caso del péndulo, con fricción o sin ella, la función de energía es **localmente** una función de Lyapunov para estabilidad, pues $\dot{V}(x) \leq 0$.
- Para el oscilador armónico $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$, la función $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ verifica $\dot{V}(x) = 0$, lo que asegura la estabilidad.

Teoremas de Estabilidad

Idea de la prueba

- Un conjunto es **positivamente invariante** si toda trayectoria que se inicia en él, se mantiene dentro de él para todo tiempo futuro.
- Sea c una constante positiva y consideremos el conjunto cerrado

$$\Omega_c = \{x \in D \mid V(x) \leq c\}$$

- La condición $\dot{V}(x) \leq 0$ asegura que ese conjunto es positivamente invariante, pues la única manera de salir de él es aumentando el valor de V .
- Si Ω_c es acotado, es compacto y **captura** todas las trayectorias que entran en él.

Teoremas de Estabilidad

Idea de la prueba

- Para probar la estabilidad, sea $\epsilon > 0$. Hay que ver que existe $\delta > 0$ tal que todas las trayectorias que se inician a menos de δ del origen, se mantienen dentro de la bola de radio ϵ (B_ϵ).
- La idea es ver que se puede meter un Ω_c dentro de B_ϵ .
- Eso sale de usar la continuidad de V . Sea $m = \min_{\|x\|=\epsilon} V(x)$ y $0 < c < m$, entonces:

$$\exists \delta > 0 / \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|V(x)\| < c$$

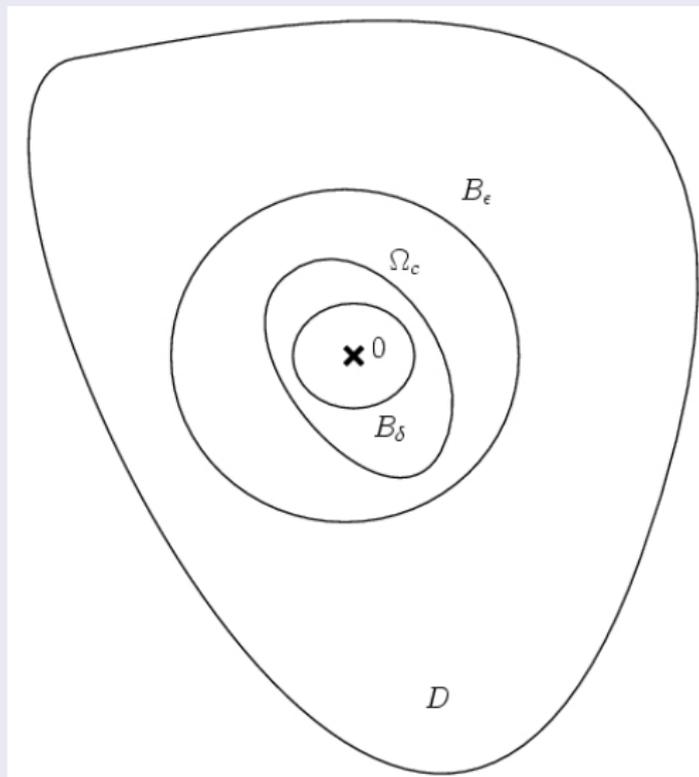
entonces, si

$$x \in B_\delta \Rightarrow x \in \Omega_c \subset B_\epsilon$$

- Como Ω_c es positivamente invariante, $f^t(x) \in \Omega_c \subset B_\epsilon$ para todo $t \geq 0$.
- Resumiendo, si $\|x\| \leq \delta$, entonces $\|f^t(x)\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$.

Teoremas de Estabilidad

Idea de la prueba



Teoremas de Estabilidad

Idea de la prueba

- Para la estabilidad asintótica, hay que usar la definición de signo $\dot{V}(x)$.
- Como fuera del origen la derivada es negativa, la función V es estrictamente decreciente.
- Hay que ver que efectivamente llega al origen y no puede decrecer asintóticamente hacia un valor positivo.

Opcional:

Leer con atención la prueba en el Khalil.

Teoremas de Estabilidad

Estabilidad global

- El teorema de Lyapunov puede asegurar la estabilidad global.
- Para ello, debe poder asegurarse que para todo $c > 0$, el conjunto Ω_c es acotado.
- Decimos que V es **radialmente no acotada** si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$$

- Entonces $\forall c > 0, \Omega_c = \{x \mid V(x) < c\}$ es acotado.

Teoremas de Estabilidad

Región de atracción

- Cuando el origen es un atractor, se define la **región de atracción** como el conjunto de puntos atraídos por él:

$$R = \left\{ x \in \mathcal{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(x) = 0 \right\}$$

- R es abierto, conexo y su frontera está constituida por trayectorias.
- Observemos que los conjuntos Ω_c acotados están siempre incluidos en R y pueden servir como *estimadores* de R .

Teoremas de Estabilidad

Teorema de Cetaev

Existen varios teoremas que manejando la idea de Lyapunov, aseguran la inestabilidad. El Teorema de Cetaev es un ejemplo:

Consideremos el sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f(0) = 0$ y un entorno del origen $D \subset \mathcal{R}^n$. Sea $V : D \rightarrow \mathcal{R}$ de clase C^1 , tal que $V(0) = 0$ y dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe x_0 , $\|x_0\| < \epsilon$, tal que $V(x_0) > 0$ y $\dot{V}(x_0) > 0$. Entonces, el origen es un punto de equilibrio inestable.

Teoremas de Estabilidad

Ejemplo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(k^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(k^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \Rightarrow \dot{V}(x) = \|x\|^2 (k^2 - \|x\|^2)$$

Entonces, para $k \neq 0$, V y \dot{V} son estrictamente positivas en un entorno del origen (sin incluirlo).

Teoremas de Estabilidad

En el ejemplo del péndulo con fricción, nuestro conocimiento del sistema nos permitió asegurar la estabilidad asintótica del origen. Sin embargo, Lyapunov sólo nos asegura la estabilidad a secas, ya que $\dot{V} \leq 0$.

Hay un resultado que nos permite ir un poco más allá.

Teorema de LaSalle

Consideremos el sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f(0) = 0$ y un entorno del origen $D \subset \mathcal{R}^n$. Sea $V : D \rightarrow \mathcal{R}$ de clase C^1 , tal que $V(0) = 0$ (V puede tomar cualquier signo). Sea Ω un conjunto compacto, que contiene al origen, positivamente invariante y tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Definamos el conjunto

$$E = \left\{ x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0 \right\}$$

Entonces, todas las trayectorias en Ω convergen al **conjunto invariante más grande** contenido en E .

Teoremas de Estabilidad

Ejemplos

- Para el caso del péndulo con fricción, los puntos que anulan la derivada tienen velocidad nula:

$$\dot{V}(x) = -Dx_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \Rightarrow E = \{x_2 = 0\}$$

- Los únicos invariantes en el eje $x_2 = 0$ son los equilibrios $x_1 = 0$ y $x_1 = \pi$, por lo que toda trayectoria (en la región donde vale LaSalle) va a parar a alguno de esos dos puntos.
- Si usamos la información de que el origen es localmente estable y $(\pi, 0)^T$ es inestable (silla), por LaSalle, y con la función de Lyapunov que ya teníamos, concluimos que es asintóticamente estable.

Teoremas de Estabilidad

Teoremas recíprocos

- Existen numerosas versiones de resultados recíprocos al Teorema de Lyapunov.
- Son del estilo siguiente: asumiendo que se cumple la estabilidad asintótica, se prueba la existencia de una función de Lyapunov.
- No podemos dejar de mencionar el resultado de José Luis Massera (1949), que es una de las versiones recíprocas más generales.
- Los resultados recíprocos tienen mucha utilidad teórica.

Funciones de Lyapunov cuadráticas

$$\dot{x} = Ax$$

Las funciones de Lyapunov *naturales* para sistemas lineales son formas cuadráticas. Consideremos la matrix $P = P^T > 0$ y la forma cuadrática $V(x) = x^T P x$.

- Entonces

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x (= 2x^T A^T P x) \\ &= x^T (A^T P + P A) x\end{aligned}$$

- Para ser una función de Lyapunov, debe ser $Q = -(A^T P + P A) > 0$

Teorema

Dada $Q = Q^T > 0$, existe una matrix $P = P^T > 0$, solución de la ecuación $-Q = A^T P + P A$ si y sólo si A es Hurwitz.

Linealización

Resultado importante

- Ya vimos que Si $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$ es Hurwitz, \bar{x} es localmente asintóticamente estable.
- Si $P = P^T > 0$, $A^T P + PA = -Q < 0$, entonces $V(x) = x^T P x$ es una función de Lyapunov para el sistema no lineal. Veámoslo:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = f^T(x) P x + x^T P f(x)$$

Escribamos $f(x) = Ax + g(x)$, con g de segundo orden,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (A^T P + PA)x + g^T(x) P x + x^T P g(x) = \\ & x^T (A^T P + PA)x + 2x^T P g(x) \leq x^T (A^T P + PA)x + 2\|x\| \cdot \|P\| \cdot \|g(x)\| \end{aligned}$$

Linealización

Resultado importante

Recordemos que:

- $x^T(A^T P + PA)x = -x^T Qx$
- $\lambda_{\min}(Q) \cdot \|x\|^2 \leq x^T Qx \leq \lambda_{\max}(Q) \cdot \|x\|^2$
- $\|P\| = \lambda_{\max}(P)$
- Existe γ positivo, arbitrariamente chico, tal que si $\|x\|$ es suficientemente chica: $\|g(x)\| \leq \gamma \cdot \|x\|$.

Entonces $\dot{V}(x) \leq x^T(A^T P + PA)x + 2\|x\| \cdot \|P\| \cdot \|g(x)\|$

$$\leq -\lambda_{\min}(Q) \cdot \|x\|^2 + 2\gamma \lambda_{\max}(P) \cdot \|x\|^2 < 0 \text{ si } \boxed{\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}}$$

Péndulo con fricción

$$\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -Dx_2 - \left(\frac{g}{l}\right) \sin(x_1) \end{cases}$$

- Usando la función de energía

$$V(x) = \left(\frac{g}{l}\right) [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2}x_2^2$$

probamos que era estable. La derivada es $\dot{V}(x) = -Dx_2^2$.

- Probar que eligiendo $P > 0$ adecuada, la siguiente función de Lyapunov asegura la estabilidad asintótica:

$$V(x) = \left(\frac{g}{l}\right) [1 - \cos(x_1)] + x^T P x$$

(ver Ejemplo 3.4 del Khalil)

Sistemas perturbados

Introducción

- Consideremos el sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$, con $x = 0$ un punto de equilibrio **asintóticamente estable**.
- Asumiremos que conocemos una función de Lyapunov $V(x)$ para el sistema, que cumple

- $0 \leq k_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq k_2 \|x\|^2$

- $\dot{V}(x) \leq -k_3 \|x\|^2$

- $\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right\| \leq k_4 \|x\|$

con k_1 , k_2 , k_3 y k_4 constantes positivas.

- Por ejemplo, para un sistema lineal, con A Hurwitz y $V(x) = x^T P x$:

- $0 \leq \underline{\lambda}(P) \|x\|^2 \leq V(x) \leq \bar{\lambda}(P) \|x\|^2$

- $\dot{V}(x) \leq -\underline{\lambda}(Q) \|x\|^2$

- $\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right\| \leq 2\bar{\lambda}(P) \|x\|$

Sistemas perturbados

Consideremos el **sistema perturbado**:

$$\dot{x} = f(x) + \delta(x)$$

$$\delta(0) = 0$$

- El origen sigue siendo un punto de equilibrio del sistema perturbado.
- Bajo ciertas propiedades de $\delta(x)$, $V(x)$ es una función de Lyapunov para el sistema perturbado.
- Por ejemplo: $\|\delta(x)\| \leq \gamma\|x\|$, $\gamma > 0$, con γ suficientemente pequeño. Probarlo!!!

Sistemas perturbados

Ejemplo

- Si $f(0) = 0$, entonces podemos escribir

$$\dot{x} = Ax + \delta(x)$$

con $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ y $\delta(x) = f(x) - Ax$.

- Sabemos que en un entorno del origen,

$$\|\delta(x)\| \leq \gamma\|x\| \quad \text{pues} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|\delta(x)\|}{\|x\|} = 0$$

ya que $\delta(x)$ es un término de segundo orden.

- Entonces, una función de Lyapunov cuadrática sirve localmente para el sistema no lineal y la podemos usar para estimar la región de atracción.

Sistemas perturbados

$$\delta(0) \neq 0$$

- La situación aquí es más complicada, pues el origen no es un equilibrio del sistema perturbado.
- Si la perturbación es acotada ($\|\delta(x)\| \leq \gamma$), entonces la función \dot{V} seguirá cumpliendo que es negativa **lejos** del origen.
- Esto implica que las trayectorias se acercarán a un entorno del origen **positivamente invariante**.
- Esto lleva al concepto de **ultimate boundedness**.

Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

Planteo del problema

- Un sistema eléctrico de potencia se puede modelar mediante una ecuación algebraico-diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y, \lambda) \\ 0 &= g(x, y, \lambda) \end{cases}$$

donde

- x es el estado del sistema (posición y velocidad de los rotores de las máquinas generadoras, estados de controladores),
- y denota los módulos y las fases de las tensiones fasoriales en los nodos de la red eléctrica,
- f representa los balances de potencia en los ejes de las máquinas,
- g representa la red eléctrica (leyes de Kirchoff)
- λ representa ciertos parámetros de control o de perturbación.

Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

Falla en el sistema

- Cuando se produce una falla en el sistema, cambian las funciones f y g .
- Posibles fallas: salida de una línea por cortocircuito, salida de un generador, desconexión de una carga, etc.

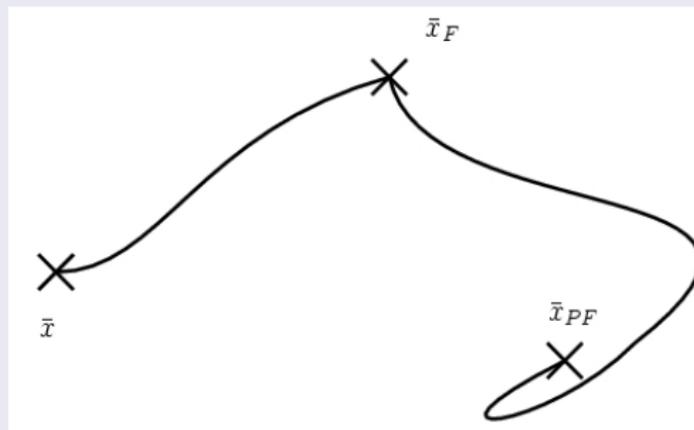
Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

Falla en el sistema

- Supongamos que el sistema se encuentra operando de manera aceptable.
- En el modelo, esto equivale a que el sistema está en un punto de equilibrio asintóticamente estable.
- Al producirse una falla, cambia el sistema y ese punto de equilibrio pasa a ser la condición inicial del nuevo sistema.
- Usaremos la siguiente notación:
 - Sistema pre-falla: f y g
 - Sistema durante la falla: f_F y g_F
 - Sistema post-falla: f_{PF} y g_{PF}
- Definamos
 - Equilibrio pre-falla: \bar{x} .
 - Estado en el instante en que se limpia la falta: \bar{x}_F .
 - Equilibrio post-falla: \bar{x}_{PF} .

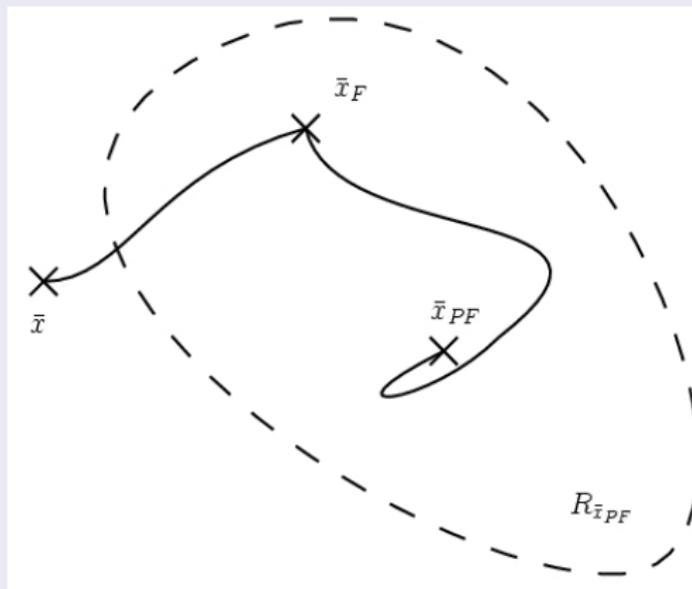
Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

Esquema de la situación



Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

Situación deseada



Tiempo de reparación de falla en un sistema eléctrico de potencia

Conclusión

- \bar{x}_F , el estado del sistema en el instante de reparación de la falla, debe estar dentro de la región de atracción del punto de operación deseado para el sistema post-falla.
- Conociendo el tipo de falla, conocemos f_{PF} y podemos simular el sistema durante la falla.
- Si tenemos una estimación de $R_{\bar{x}_{PF}}$ (por ejemplo, conocemos una función de Lyapunov), podemos determinar un **tiempo máximo de despeje** para la falta.