Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2017**

Solución Examen – Miércoles 19 de julio de 2017

(I) Respuesta múltiple opción.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
A	B	A	C

(II) Desarrollo.

Problema 1

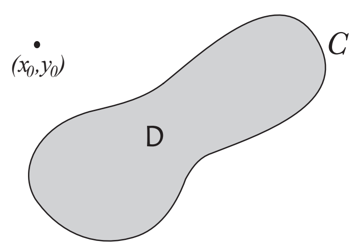
Sean

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) \ \ , \ \ G(x,y) = (G_1(x,y), G_2(x,y))$$

dos campos vectoriales C^1 definidos en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}$, tales que para todo $(x,y) \in \Omega$ se cumple:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}.$$

a) Consideremos $\mathcal{C}$ curva cerrada simple en Ω, tal que no contiene al punto (x_0,y_0) en su interior. Sea D la región encerrada por dicha curva. Como el punto (x_0,y_0) no pertenede a D podemos aplicar el teorema de Geen en dicha región, tanto al campo F como al campo G.



Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} F = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\oint_{\mathcal{C}} G = \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dxdy$$

Como en Ω vaale la siguiente igualdad

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}.$$

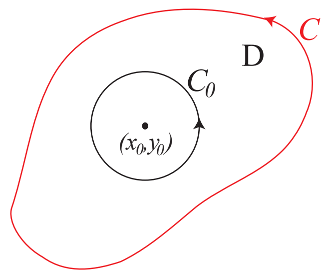
se deduce que

$$\oint_{\mathcal{C}} F = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\mathcal{C}} G$$

Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} F = \oint_{\mathcal{C}} G.$$

b) Sean $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple que da una vuelta en sentido antihorario alrededor del punto (x_0, y_0) y $\mathcal{C}_0$ es la circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio 1, orientada en sentido antihorario



Sea D la región comprendida entre las curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_0$, usando la generalización del teorema de Green podemos deducir que

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\mathcal{C}} F - \oint_{\mathcal{C}_0} F$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\mathcal{C}} G - \oint_{\mathcal{C}_0} G$$

Como $D \subset \Omega$ podemos razonar de igual forma que en la parte anterior y deducir que las integrales a la izquierda de las fórmulas previas coinciden, entonces, si restamos obtenemos que:

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} F - \oint_{\mathcal{C}_0} F - \oint_{\mathcal{C}} G + \oint_{\mathcal{C}_0} G,$$

por lo tanto

$$\oint_{\mathcal{C}} F = \oint_{\mathcal{C}} G + \oint_{\mathcal{C}_0} (F - G).$$

Considere ahora los campos vectoriales

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \left(\frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-2)^2}, \frac{y-2}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right) \\ F(x,y) &= G(x,y) + \left(\frac{2-y}{(x-1)^2 + (y-2)^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right), \end{aligned}$$

definidos en todo $\mathbb{R}^2$ excepto en el punto $(1, 2)$.

c) Sea $H(x,y) = \left(\frac{2-y}{(x-1)^2+(y-2)^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2} \right)$, es fácil ver que $\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = 0$. Observar que $F(x,y) = G(x,y) + H(x,y)$, entonces, por lo anterior deducimos que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}.$$

Por lo tanto podemos usar lo probado en la parte b) del problema, es decir

$$\oint_{\mathcal{C}} F = \oint_{\mathcal{C}} G + \oint_{\mathcal{C}_0} (F - G),$$

donde $\mathcal{C}$ es la elipse: $(x-1)^2 + 16(y-2)^2 = 1$ recorrida en sentido antihorario y $\mathcal{C}_0$ es la circunferencia con centro en $(1, 2)$ y radio 1, orientada en sentido antihorario.

$$\oint_{\mathcal{C}_0} (F - G) = \oint_{\mathcal{C}_0} H = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t)(-\sin t, \cos t) dt = 2\pi,$$

donde $\mathcal{C}_0$ está parametrizada por $\alpha(t) = (1+\cos t, 2+\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Veamos como calcular $\oint_{\mathcal{C}} G$, para esto veamos que G es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2 - \{(1,2)\}$.
Supongamos que existe f campo escalar definido en $\mathbb{R}^2 - \{(1,2)\}$ tal que $\nabla f = G$, entonces

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left((x-1)^2 + (y-2)^2\right)$$

Como $\mathcal{C}$ es una curva cerrada deducimos que $\oint_{\mathcal{C}} G = 0$. Por lo tanto

$$\oint_{\mathcal{C}} F = 2\pi.$$

Problema 2 (26 puntos)

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1.

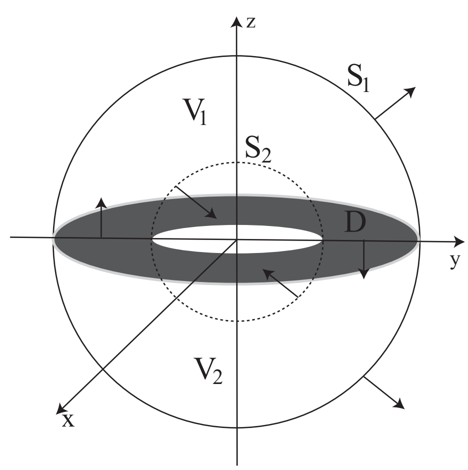
a) Ver teórico.
b) Ver teórico.
c) Por la parte anterior $\nabla \wedge F(p_0)$ en la dirección n es igual a $\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial S_r} F$. Por lo tanto dicho límite existe y podemos calcularlo usando la sucesión de discos planos $\{S_{r_n} : n = 1, 2, \ldots\}$, centrados en p_0 y de radios $r_n = \frac{1}{n}$. Como la circulación de F alrededor de cada borde ∂S_{r_n} es 0 tenemos que $\nabla \wedge F(p_0) \cdot n = 0$.

Problema 3 (26 puntos)

Considere $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1, donde $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

a) Ver teórico.
b) Enunciado de Gauss ver teórico.

Sean S_1 y S_2 son dos superficies cerradas que contienen al punto $(0,0,0)$ y F es un campo solenoidal. Consideremos V el volúmen encerrado por S_1 y S_2. Como este volúmen tiene dos componentes frontera no podemos usar el teorema de Gauss. Sin embargo podemos cortar a dicho volúmen por el plano $z = 0$ y obtener V_1 y V_2 como se muestran en la figura ($V_1 \cup V_2 = V$).



Ahora V_1 y V_2 tienen frontera simple y el campo está definido en ambos, por lo cual podemos aplicar Gauss en ellos, de lo cual deducimos que

$$0 = \iiint_{V_1} \nabla \cdot F = \iint_{\partial V_1} F \cdot dS$$

$$0 = \iint_{V_2} \nabla \cdot F = \int_{\partial V_2} F \cdot dS$$

∂V_1 y ∂V_2 tienen que ser orientados con normal exterios a los respectivos volúmenes que encierran. Por lo tanto, en un caso D tiene normal hacia abajo y en el otro hacia arriba. Si notamos $\partial V_1 = D \cup S_{11} \cup S_{21}$, donde S_{11} y S_{21} son las componentes de S_1 y S_2 que forman parte de la frontera de V_1 y V_2 respectivamente y de forma análoga $\partial V_2 = D \cup S_{12} \cup S_{22}$, usando Gauss y teniendo en cuenta las orientaciones tenemos que

$$0 = \iint_{\partial V_1} F + \int_{\partial V_2} F = \iint_{S_{11}} F - \iint_{S_{21}} F - \iint_{D} F + \iint_{S_{12}} F - \iint_{S_{22}} F + \iint_{D} F$$
$$= \iint_{S_{11}} F - \iint_{S_{21}} F + \iint_{S_{12}} F - \iint_{S_{22}} F = \iint_{S_1} F - \iint_{S_2} F$$

Entonces

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = \iint_{S_2} F \cdot dS.$$

Considere finalmente un campo solenoidal $F = (P, Q, R)$ definido en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, tal que las componentes de F cumplen las siguientes condiciones:

- En el plano $x = 1$ la primera componente verifica $P(1, y, z) = 3\big(y^2 + z^2\big)$; y en el plano $x = -1$, $P(-1, y, z) = -3\big(y^2 + z^2\big)$.
- En los planos $y = 1$ e $y = -1$ la segunda componente verifica $Q(x, 1, z) = Q(x, -1, z) = 0$.
- En los planos $z = 1$ y $z = -1$ la tercera componente verifica $R(x, y, 1) = R(x, y, -1) = 0$.

c) Como el campo es solenoidal podemos usar la parte anterior para calcular el flujo del campo sobre la esfera $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ sustituyendo por el cubo de caras en los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ y $z = \pm 1$, ya que ambas superficies encierran al origen. Entonces

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_C F \cdot dS$$

donde C es el cubo mencionado. Dicho cubo se puede parametrizar medienate las seis parametrizaciones de las caras. Observemos que por la información dada del campo de estas seis integrales sólo sobreviven dos, porque las integrales sobre las caras $y = \pm 1$ y $z = \pm 1$ dan 0 porque los vectores normales sólo tienen componene no nula donde el campo es nulo. Por lo tanto

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{C_1} F \cdot dS + \iint_{C_2} F \cdot dS = \iint_{C_1} 3(y^2 + z^2) dS + \iint_{C_2} 3(y^2 + z^2) dS$$
$$= 6 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (y^2 + z^2) dy dz = 16.$$