Universidad de la República **Cálculo 3**

Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2017**

Solución primer parcial – Miércoles 3 de mayo de 2017

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 40 puntos.
- La duración del parcial es tres horas.

La siguientes fórmulas pueden ser de utilidad (o pueden no tener utilidad alguna):

- Si $\alpha = \alpha(t)$ es una curva diferenciable en $\mathbb{R}^3$, la curvatura k y la torsión τ están dadas por $k = \frac{\|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha\|}{\|\dot\alpha\|^3}$, $\tau = \frac{(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha)}{\|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha\|^2}$ (el numerador es el producto mixto).
- $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

(I) Múltiple opción. Total: 20 puntos

Puntajes: 4 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
B	A	C	B	A

Ejercicio 1

Sea $\mathcal{C}$ la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x + z = 0$. Entonces:

A) Existe un punto de la curva con curvatura nula y torsión no nula.
B) La curva tiene curvatura constante no nula y torsión nula en todo punto.
C) La curva tiene torsión no nula en todo punto.

Ejercicio 2

Sea el campo $F(x, y) = (-y, x + 3)$ y $\mathcal{C}$ la curva cerrada con orientación positiva que limita la región

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4x \ , \ \ x^2 + y^2 \geq 2x\right\}$$

Entonces $\int_{\mathcal{C}} F\, ds$ es:

A) 6π.
B) 4π.
C) 0.

Ejercicio 3

El área encerrada por la curva plana $\alpha(t) = (\cos t, \sin(2t))$, con $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, es:

A) $\frac{8}{3}$.
B) 4.
C) $\frac{4}{3}$.

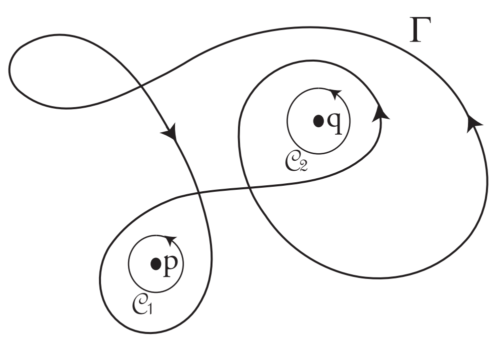
Ejercicio 4

Considere el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y) = (2xye^{x^2y} + ay^2, 2xy - 2bx^2e^{x^2y})$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
Entonces:

A) No existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que F es de gradientes.
B) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que F es de gradientes, y en ese caso también existe un potencial escalar f de F tal que $f(0,0) = f(0,1) = 0$.
C) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que F es de gradientes, y en ese caso también existe un potencial f de F tal que $f(0,0) = 0$ y $f(0,1) \neq 0$.

Ejercicio 5

Considere $X : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2$, $Y : \mathbb{R}^2 \setminus \{q\} \to \mathbb{R}^2$ dos campos irrotacionales tales que $\oint_{C_1} X.ds = -2\pi$ y $\oint_{C_2} Y.ds = \pi$, donde C_1 y C_2 son dos curvas cerradas como se muestran en la figura.



Se define el campo $Z = X + 4Y$ y se considera la curva cerrada Γ de la figura.
Entonces:

A) $\oint_{\Gamma} Z.ds = 10\pi$.
B) $\oint_{\Gamma} Z.ds = 0$.
C) $\oint_{\Gamma} Z.ds = 4\pi$.

(II) Desarrollo. Total: 20 puntos

Todo resultado teórico que utilice en la resolución de los problemas debe estar adecuadamente justificado.

Problema 1 (10 puntos)

a) Pruebe que si $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (de clase C^1, U abierto) es un campo de gradientes entonces es irrotacional.

Ver teórico.

Considere el campo $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y,z) = (f(r)x, f(r)y, f(r)z)$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1.

b) Pruebe que F es de gradientes.

Como $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ es simplemente conexo, para ver que F es de gradientes es suficiente probar que es irrotacional.

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} f(r)z - \frac{\partial}{\partial z} f(r)y, \frac{\partial}{\partial z} f(r)x - \frac{\partial}{\partial x} f(r)z, \frac{\partial}{\partial x} f(r)y - \frac{\partial}{\partial y} f(r)x \right)$$

$$= \frac{f'(r)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \big(2yz - 2zy, 2zx - 2xz, 2xy - 2yx\big) = (0,0,0).$$

c) Para la familia de funciones $f(r) = r^n$, con $n \in \mathbb{R}$, $n \neq -2$, calcule la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} F\, ds$, donde $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $\alpha(t) = \left(t^3, t^2+1, t - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$, $t \in [0,1]$.

En este caso $F(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{n/2}(x,y,z)$. Por la parte anterior sabemos que es de gradientes, construyamos un potencial escalar de F, es decir $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla g = F$. Es fácil ver que un candidato posible es $g(x,y,z) = \frac{1}{n+2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{(n+2)/2}$. Entonces, usando el teorema de Barrow tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} F\, ds = g\big(\alpha(1)\big) - g\big(\alpha(0)\big) = g(1,2,0) - g(0,1,0) = \frac{(\sqrt{5})^{n+2} - 1}{n+2}.$$

Problema 2 (10 puntos)

Sean $\mathcal{C}$ una curva de clase C^1 contenida en $U \subset \mathbb{R}^3$, y $\big(\alpha, [a,b]\big)$ y $\big(\beta, [c,d]\big)$ dos parametrizaciones equivalentes de $\mathcal{C}$ (es decir, que preservan la orientación). Sea además $X : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo.

a) Pruebe que

$$\int_a^b X\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)dt = \int_c^d X\big(\beta(t)\big) \cdot \beta'(t)dt.$$

Ver teórico.

Considere $g(t)$, la función posición en $\mathbb{R}^3$ de una partícula de masa variable $m(t)$ en el tiempo t. El vector de velocidad de la partícula es $v(t) = g'(t)$, y el vector de fuerza que actúa sobre la partícula en $g(t)$ es

$$F\big(g(t)\big) = \big[m(t)v(t)\big]'.$$

b) Pruebe que $F\big(g(t)\big)\cdot g'(t) = m'(t)\,||v(t)||^2 + m(t)\,||v(t)||\,\frac{d}{dt}||v(t)||$.

$$\begin{aligned} F\big(g(t)\big)\cdot g'(t) &= \big[m(t)v(t)\big]'\cdot g'(t) = \big[m'(t)v(t)+m(t)v'(t)\big]\cdot v(t)\\ &= m'(t)v(t)\cdot v(t) + m(t)v(t)\cdot v'(t)\\ &= m'(t)\,||v(t)||^2 + m(t)v(t)\cdot v'(t) \end{aligned}$$

Notar que

$$\big[v(t)\cdot v(t)\big]' = v'(t)\cdot v(t) + v(t)\cdot v'(t) = 2v(t)\cdot v'(t)$$

y

$$\big[v(t)\cdot v(t)\big]' = \frac{d}{dt}||v(t)||^2 = 2||v(t)||\frac{d}{dt}||v(t)||$$

Entonces

$$v(t)\cdot v'(t) = ||v(t)||\frac{d}{dt}||v(t)||$$

Finalmente, sustituyendo concluimos que $F\big(g(t)\big)\cdot g'(t) = m'(t)\,||v(t)||^2 + m(t)\,||v(t)||\,\frac{d}{dt}||v(t)||$.

c) Pruebe que si $m(t) = m$ es constante, entonces el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula, entre los tiempos $t = a$ y $t = b$, es $W = \frac{1}{2}\big(m\,||v(b)||^2 - m\,||v(a)||^2\big)$.

El trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula es

$$W = \int_a^b F\big(g(t)\big)\cdot g'(t)dt = \int_a^b \left\{m'(t)\,||v(t)||^2 + m(t)\,||v(t)||\,\frac{d}{dt}||v(t)||\right\}dt,$$

como m es constante $m'(t) = 0$ y la integral se reduce a

$$W = \int_a^b m\,||v(t)||\,\frac{d}{dt}||v(t)||dt = m\frac{1}{2}||v(t)||^2|_a^b = \frac{1}{2}m\big(||v(b)||^2 - ||v(a)||^2\big).$$