Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2017**

Segundo parcial – Miércoles 28 de junio de 2017

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 60 puntos.
- La duración del parcial es tres horas.

(I) Múltiple opción. Total: 25 puntos

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
C	B	A	B	A

Ejercicio 1:

Considere la superfice S dada por la parametrización

$$\begin{aligned} \Phi: \quad [0,2\pi)\times[0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\alpha) &\mapsto \big((3+\cos\theta)\cos\alpha, (3+\cos\theta)\sin\alpha, \sin\theta\big) \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación del plano tangente a la superficie S en $P=(2,0,0)$ es:

A) $x+y+z=2$.
B) $x+y=2$.
C) $x=2$.

Ejercicio 2:

Sea F el campo en $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z)=(x^2+1, z-2xy, y)$.
Considere las siguientes afirmaciones:

(I) El campo F **no** admite potencial vector.
(II) Existe al menos un potencial vector A de F que cumple $A(x,0,0)=(x,0,0)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.
(III) Todo potencial vector A de F cumple $A(0,0,0)=(0,0,0)$.

Entonces:

A) Sólo la afirmación (I) es verdadera.
B) Sólo la afirmación (II) es verdadera.
C) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

Ejercicio 3:

Considere la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1 , -1 \leq y \leq 1\}$, con la orientación hacia adentro. Considere además las regiones de $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \left\{(x, y, z) : -\frac{3}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2}\right\} \;\; , \;\; V_2 = \left\{(x, y, z) : \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}\right\}.$$

Sea finalmente $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 que cumple:

- $F((x, y, z)) = -3(x, 0, z)$ para todo $(x, y, z) \in V_1$.
- $F((x, y, z)) = 2(-z, 0, x)$ para todo $(x, y, z) \in V_2$.

Entonces $\iint_S \operatorname{rot}(F) \cdot dS$ es:

A) -4π.
B) 0.
C) π.

Ejercicio 4:

Sea F el campo en $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (x, y, z) \wedge (1, 2, 1)$. Sea además S la superficie definida por la intersección de las regiones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + 2y + z \geq 0$, orientada con normal exterior. Entonces el flujo del campo F a través de S, $\iint_S F \cdot dS$, es:

A) 2π.
B) 0.
C) $-\frac{3}{2}\pi$.

Ejercicio 5:

Sean $\omega_1 = -ydx + zdz$ y $\omega_2 = ydy + xdz$ dos 1-formas diferenciales definidas en $\mathbb{R}^3$.
Entonces $d(\omega_1 \wedge \omega_2)$ es:

A) $xdxdydz$.
B) $-y^2dxdy - yzdydz + xydzdx$.
C) 0.

(II) Desarrollo

Problema 1

Sea M una bola cerrada en $\mathbb{R}^3$. Sean $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos de clase C^1 tales que $\operatorname{rot}(F) = \operatorname{rot}(G)$ en M, $\operatorname{div}(F) = \operatorname{div}(G)$ en M, y $F.\mathbf{n} = G.\mathbf{n}$ en ∂M (siendo $\mathbf{n}$ la normal exterior a la superficie ∂M).

a) Pruebe que existe $f : M \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\nabla f = F - G$ (en M).

M simplemente conexo, $\operatorname{rot}(F-G) = \operatorname{rot}(F) - \operatorname{rot}(G) = 0$, es decir, $F - G$ es irrotacional, por lo tanto $F - G$ admite un potencial escalar f, es decir $\nabla f = F - G$.

b) Pruebe (haciendo los cálculos de manera directa) que

$$\operatorname{div}(f\nabla f) = \| \nabla f \|^2 + f \operatorname{div}(\nabla f).$$

$$\begin{aligned} f\nabla f = (ff_x, ff_y, ff_z) \Rightarrow \operatorname{div}(f\nabla f) &= \frac{\partial}{\partial x}(ff_x) + \frac{\partial}{\partial y}(ff_y) + \frac{\partial}{\partial z}(ff_z) \\ &= f_x f_x + ff_{xx} + f_y f_y + ff_{yy} + f_z f_z + ff_{zz} \\ &= \big(f_x\big)^2 + \big(f_y\big)^2 + \big(f_z\big)^2 + f\big(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}\big) \\ &= \| \nabla f \|^2 + f \operatorname{div}(\nabla f). \end{aligned}$$

c) Pruebe que $\iiint_M \| \nabla f \|^2 \, dxdydz = 0$ y deduzca que $F = G$ en M.
Por la parte anterior tenemos que

$$\| \nabla f \|^2 = \operatorname{div}(f\nabla f) - f \operatorname{div}(\nabla f).$$

Además, $\nabla f = F - G$ entonces $\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}(F - G) = \operatorname{div}(F) - \operatorname{div}(G) = 0$. Entonces

$$\| \nabla f \|^2 = \operatorname{div}(f\nabla f).$$

Aplicando el teorema de Gauss

$$\iiint_M \| \nabla f \|^2 \, dxdydz = \iiint_M \operatorname{div}(f\nabla f) dxdydz = \iint_{\partial M} f\nabla f \cdot dS$$

$$= \iint_{\partial M} (f\nabla f).\mathbf{n} dS = \iint_{\partial M} f(F-G).\mathbf{n} dS = \iint_{\partial M} f(F.\mathbf{n} - G.\mathbf{n}) dS = 0 \text{ porque } F.\mathbf{n} = G.\mathbf{n}.$$

Como la función $\| \nabla f \|^2 \geq 0$ es continua y $\iiint_M \| \nabla f \|^2 \, dxdydz = 0$ podemos concluir que $\nabla f = 0$, por lo tanto $F = G$.

Problema 2

Considere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1.

a) ¿Cuándo se dice que el campo F es solenoidal?
Ver teórico.

b) Pruebe que si F es un campo solenoidal y $S = S_1 \cup S_2$ es una superficie cerrada, orientada, con $S_1 \cap S_2$ definiendo una curva cerrada simple, entonces

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = -\iint_{S_2} F \cdot dS,$$

donde las orientaciones de las superficies S_1 y S_2 son heredadas de la orientación de S.

Usando el teorema de Gauss (se puede usar porque el domino del campo es todo el espacio)

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} F dV = 0,$$

porque F es solenoidal, donde V es el volumen encerrado por S. Por lo tanto

$$0 = \iint_S F \cdot dS = \iint_{S_1 \cup S_2} F \cdot dS = \iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} F \cdot dS = -\iint_{S_2} F \cdot dS.$$

Considere ahora el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = \big(ax^2yz,\, bxy^2z,\, (x^2+y^2)^2 - 4xyz^2\big),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Determine para qué valores de a y b el campo F es solenoidal.

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 2axyz + 2bxyz - 8xyz = 2xyz(a + b - 4) = 0 \Leftrightarrow a + b = 4.$$

d) Considere valores de a y b que garantizan que el campo F sea solenoidal. Sea S el casquete de esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 5/4$, con la condición $z \leq 1/2$. Calcule el flujo $\iint_S F \cdot dS$, donde $\mathbf{n}$ es el campo normal saliente.

Usando la parte b) podemos considerar el disco D que se obtiene de cortar el plano $z = 1/2$ con la esfera maciza $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5/4$ y

$$\iint_S F \cdot dS = -\iint_D F \cdot dS.$$

Observar que en la igualdad anterior D tiene normal hacia arriba. Consideremos la siguiente parametrización de D

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & [0,1] \times [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta) & \mapsto & \big(r\cos\theta, r\sin\theta, 1/2\big) \end{array}$$

$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = (0, 0, r)$, entonces

$$\iint_D F \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^4 - r^2 \cos\theta \sin\theta) r dr d\theta = \frac{\pi}{3},$$

por lo tanto

$$\iint_S F \cdot dS = -\frac{\pi}{3}.$$