Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2017**

SEGUNDO PARCIAL – MIÉRCOLES 28 DE JUNIO DE 2017

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 60 puntos.
- La duración del parcial es tres horas.

(I) Múltiple opción. Total: 25 puntos

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5

Ejercicio 1:

Considere la superfice S dada por la parametrización

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & [0,2\pi)\times[0,2\pi) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta,\alpha) & \mapsto & \big((3+\cos\theta)\cos\alpha, (3+\cos\theta)\sin\alpha, \sin\theta\big) \end{array}$$

Entonces, la ecuación del plano tangente a la superficie S en $P=(2,0,0)$ es:

A) $x+y+z=2$.
B) $x+y=2$.
C) $x=2$.

Ejercicio 2:

Sea F el campo en $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z)=(x^2+1, z-2xy, y)$.
Considere las siguientes afirmaciones:

(I) El campo F **no** admite potencial vector.
(II) Existe al menos un potencial vector A de F que cumple $A(x,0,0)=(x,0,0)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.
(III) Todo potencial vector A de F cumple $A(0,0,0)=(0,0,0)$.

Entonces:

A) Sólo la afirmación (I) es verdadera.
B) Sólo la afirmación (II) es verdadera.
C) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

Ejercicio 3:

Considere la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1 \ , \ -1 \leq y \leq 1\}$, con la orientación hacia adentro. Considere además las regiones de $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \left\{(x, y, z) : -\frac{3}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2}\right\} \ , \ V_2 = \left\{(x, y, z) : \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}\right\}.$$

Sea finalmente $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 que cumple:

- $F((x, y, z)) = -3(x, 0, z)$ para todo $(x, y, z) \in V_1$.
- $F((x, y, z)) = 2(-z, 0, x)$ para todo $(x, y, z) \in V_2$.

Entonces $\iint_S \mathrm{rot}(F) \cdot dS$ es:

A) -4π.
B) 0.
C) π.

Ejercicio 4:

Sea F el campo en $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (x, y, z) \wedge (1, 2, 1)$. Sea además S la superficie definida por la intersección de las regiones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + 2y + z \geq 0$, orientada con normal exterior. Entonces el flujo del campo F a través de S, $\iint_S F \cdot dS$, es:

A) 2π.
B) 0.
C) $-\frac{3}{2}\pi$.

Ejercicio 5:

Sean $\omega_1 = -ydx + zdz$ y $\omega_2 = ydy + xdz$ dos 1-formas diferenciales definidas en $\mathbb{R}^3$.
Entonces $d(\omega_1 \wedge \omega_2)$ es:

A) $xdxdydz$.
B) $-y^2dxdy - yzdydz + xydzdx$.
C) 0.

(II) Desarrollo. Total: 35 puntos

Todo resultado teórico que utilice en la resolución de los problemas debe estar adecuadamente justificado.

Problema 1 (16 puntos)

Sea M una bola cerrada en $\mathbb{R}^3$. Sean $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos de clase C^1 tales que $\text{rot}(F) = \text{rot}(G)$ en M, $\text{div}(F) = \text{div}(G)$ en M, y $F.\mathbf{n} = G.\mathbf{n}$ en ∂M (siendo $\mathbf{n}$ la normal exterior a la superficie ∂M).

a) **(2 puntos)** Pruebe que existe $f : M \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\nabla f = F - G$ (en M).

b) **(5 puntos)** Pruebe (haciendo los cálculos de manera directa) que

$$\text{div}(f\nabla f) = \| \nabla f \|^2 + f\,\text{div}(\nabla f).$$

c) **(9 puntos)** Pruebe que $\iiint_M \| \nabla f \|^2 \, dxdydz = 0$ y deduzca que $F = G$ en M.

Problema 2 (19 puntos)

Considere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1.

a) **(2 puntos)** ¿Cuándo se dice que el campo F es solenoidal?

b) **(6 puntos)** Pruebe que si F es un campo solenoidal y $S = S_1 \cup S_2$ es una superficie cerrada, orientada, con $S_1 \cap S_2$ definiendo una curva cerrada simple, entonces

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = -\iint_{S_2} F \cdot dS,$$

donde las orientaciones de las superficies S_1 y S_2 son heredadas de la orientación de S.

Considere ahora el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = \big(ax^2yz,\, bxy^2z,\, (x^2 + y^2)^2 - 4xyz^2\big),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

c) **(3 puntos)** Determine para qué valores de a y b el campo F es solenoidal.

d) **(8 puntos)** Considere valores de a y b que garantizan que el campo F sea solenoidal. Sea S el casquete de esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 5/4$, con la condición $z \leq 1/2$. Calcule el flujo $\iint_S F \cdot dS$, donde $\mathbf{n}$ es el campo normal saliente.