Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2017**

Examen – Miércoles 19 de julio de 2017

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del examen es 4 horas.
- El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.

La siguiente fórmula puede ser de utilidad:

- $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$.

(I) Múltiple opción. Total: 24 puntos

Puntajes: 6 puntos si la respuesta es correcta, -3 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4

Ejercicio 1

Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1 definido en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
Considere las siguientes afirmaciones:

(I) F es conservativo si y sólo si es de gradientes.
(II) F es de gradientes si y sólo si es irrotacional.
(III) F tiene un potencial vector (esto es, $F = \nabla \wedge A$ para algún campo vectorial A) si y sólo si es solenoidal.

Entonces:

A) Sólo la afirmación (I) es verdadera.
B) Todas las afirmaciones son verdaderas.
C) Sólo la afirmación (III) es verdadera.

Ejercicio 2

El área encerrada por la curva plana $\alpha(t) = (\sin(2t)\,,\, 2\sin(t))$, con $0 \le t \le \pi$, es:

A) $\frac{1}{3}$.
B) $\frac{8}{3}$.
C) $\frac{4}{3}$.

Ejercicio 3

Sea el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = \big(xz\,,\, yz\,,\, (z-1)^2(z-2)\sin\left(z^2 - x^2 - y^2\right)\big)\,.$$

Considere el volumen V definido por las condiciones: $x^2 + y^2 \leq z^2\ ,\ 1 \leq z \leq 2$.
Entonces la integral de $\nabla . F$ en V es:

A) $\frac{15}{2}\pi$.
B) $\frac{5}{3}\pi$.
C) 0.

Ejercicio 4

Sean $f(x, y, z) = \sin(xy)$ una 0-forma diferencial, $\omega = xydy \wedge dz + e^z dx \wedge dy$ una 2-forma diferencial, ambas definidas en $\mathbb{R}^3$.
Entonces $d(f\omega)$ es:

A) 0.
B) $(y - e^z)\sin(xy)dxdydz$.
C) $\big(y\sin(xy) + xy^2\cos(xy) + e^z\sin(xy)\big)\,dxdydz$.

(II) Desarrollo. Total: 76 puntos
Todo resultado teórico que utilice en la resolución de los problemas debe estar adecuadamente justificado.

Problema 1 (24 puntos)

Sean

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))\ \ ,\ \ G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))$$

dos campos vectoriales C^1 definidos en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$, tales que para todo $(x, y) \in \Omega$ se cumple:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}.$$

a) **(6 puntos)** Pruebe que para cualquier curva cerrada simple $\mathcal{C}$ en Ω, tal que no contenga al punto (x_0, y_0) en su interior, se cumple:

$$\oint_{\mathcal{C}} F = \oint_{\mathcal{C}} G.$$

b) **(8 puntos)** Pruebe que si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple que da una vuelta en sentido antihorario alrededor del punto (x_0, y_0) entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} F = \oint_{\mathcal{C}} G + \oint_{\mathcal{C}_o} (F - G),$$

donde $\mathcal{C}_o$ es la circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio 1, orientada en sentido antihorario.

Considere ahora los campos vectoriales

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \left(\frac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2}\,, \frac{y-2}{(x-1)^2+(y-2)^2} \right) \\ F(x,y) &= G(x,y) + \left(\frac{2-y}{(x-1)^2+(y-2)^2}\,, \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2} \right), \end{aligned}$$

definidos en todo $\mathbb{R}^2$ excepto en el punto $(1,2)$.

c) **(10 puntos)** Calcule la integral de línea $\oint_{\mathcal{C}} F$, donde $\mathcal{C}$ es la elipse: $(x-1)^2+16(y-2)^2=1$ recorrida en sentido antihorario.

Problema 2 (26 puntos)

Sea $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1.

a) **(4 puntos)** Considere una superficie simple S, orientada y con borde ∂S. Enuncie el Teorema de Stokes.

b) **(14 puntos)** Considere un punto $p_o\in\mathbb{R}^3$ fijo y una familia de discos planos $\{S_r : r\geq 0\}$ centrados en p_o y todos con el mismo versor normal n (S_r denota al disco centrado en p_o de radio r). Pruebe que, en p_o, la componente del rotor de F en la dirección n cumple:

$$[\nabla\wedge F(p_o)]\cdot n = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\oint_{\partial S_r} F,$$

donde ∂S_r es el borde de S_r orientado de manera compatible con la normal n.

c) **(8 puntos)** Suponga, en las condiciones de la parte anterior, que existe una sucesión de discos planos $\{S_{r_n} : n=1,2,\ldots\}$, centrados en p_o y de radios $r_n=\frac{1}{n}$, tales que la circulación de F alrededor de cada borde ∂S_{r_n} es 0. Calcule la componente de $\nabla\wedge F(p_o)$ en la dirección n.

Problema 3 (26 puntos)

Considere $F:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1, donde $\Omega=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

a) **(4 puntos)** ¿Cuándo se dice que el campo F es solenoidal en Ω?

b) **(10 puntos)** Enuncie el Teorema de Gauss para un volumen V con frontera simple (esto es, una única componente de frontera), y pruebe (a partir de esa variante simple del Teorema de Gauss) que si F es un campo solenoidal y S_1 y S_2 son dos superficies cerradas que contienen al punto $(0,0,0)$, entonces el flujo saliente de F a través de la superficie S_1 es igual al flujo saliente de F a través de la superficie S_2. Esto es:

$$\iint_{S_1} F\cdot dS = \iint_{S_2} F\cdot dS.$$

Considere finalmente un campo solenoidal $F=(P,Q,R)$ definido en $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, tal que las componentes de F cumplen las siguientes condiciones:

- En el plano $x=1$ la primera componente verifica $P(1,y,z)=3\big(y^2+z^2\big)$; y en el plano $x=-1$, $P(-1,y,z)=-3\big(y^2+z^2\big)$.
- En los planos $y=1$ e $y=-1$ la segunda componente verifica $Q(x,1,z)=Q(x,-1,z)=0$.
- En los planos $z=1$ y $z=-1$ la tercera componente verifica $R(x,y,1)=R(x,y,-1)=0$.

c) **(12 puntos)** Calcule el flujo saliente de F a través de la esfera: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$.