Facultad de Ingeniería. Cálculo 3
IMERL. Curso 2018 (semestre impar).

PRÁCTICO 1

Curvas, velocidad y recta tangente, longitud de arco.

1. Para cada una de las curvas halle una ecuación implícita y haga una representación gráfica indicando, cuando sea posible, su orientación. a, b, c y d son constantes positivas.

   (a) $x = at + b$, $y = ct + d$.

   (b) $x = a \cosh t$, $y = b \operatorname{senh} t$.

   (c) $x = \cos t$, $y = 0$.

   (d) $x = a \sec t$, $y = b \tan t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$.

   [sol: (a) $ay - cx = ad - bc$; (b) $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$, $x > 0$; (c) $y = 0$, $|x| \leq 1$; (d) $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$].

2. Trace las siguientes curvas y encuentre sus ecuaciones implícitas. En la primera curva halle asíntotas y en la segunda estudie concavidad para $a = 1$ y $b = 1/2$.

   $$(a)\ x = \frac{5at^2}{1+t^5},\ y = \frac{5at^3}{1+t^5}. \qquad (b)\ x = at + b \operatorname{sen} t,\ y = a - b\cos t.$$

   [sol: (a) $x^5 + y^5 = 5ax^2y^2$, (b) $x = \arccos((a-y)/b) + \sqrt{b^2 - (a-y)^2}$].

3. Obtenga las ecuaciones de la tangente y la normal en los puntos señalados.

   $$(a)\ x = a\cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ \text{ en } t = \pi/6. \quad (b)\ x = \operatorname{sen} 2t,\ y = \operatorname{sen} t,\ \text{ en } t = \pi/4.$$

   [sol:(a) tang. $y = -\sqrt{3}x + 2a$, norm. $y = x/\sqrt{3}$; (b) tang. $x = 1$, norm. $y = 1/\sqrt{2}$.]

4. Determinar el vector velocidad $\alpha'(t)$ de las siguientes curvas paramétricas:

   (a) $\alpha(t) = (6t, 3t^2, t^3)$.

   (b) $\alpha(t) = (\sin 3t, \cos t, 2t^{\frac{3}{2}})$.

   (c) $\alpha(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$.

   (d) $\alpha(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$.

5. Determinar la ecuación de la recta tangente a la trayectoria dada para el valor de t especificado.

   (a) $\alpha(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{5}{2}})$ en $t = 1$.

   (b) $\alpha(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$ en $t = 0$.

6. Una partícula que sigue la trayectoria $\alpha(t)$ se sale por la tangente en el instante t_0. Calcular la posición de la partícula en el instante t_1, donde:

(a) $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$.

(b) $\alpha(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$.

(c) $\alpha(t) = (\sin e^t, t, 4 - t^3)$, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$.

7. Bosquejar y hallar la longitud de la siguiente curva plana. [sol: $(3+\pi)/2$]

$$x = \begin{cases} \cos^3 t & \text{si } 0 \le t \le \pi/2, \\ \operatorname{sen}(t - \pi/2) & \text{si } \pi/2 < t \le \pi. \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \operatorname{sen}^3 t & \text{si } 0 \le t \le \pi/2, \\ \cos(t - \pi/2) & \text{si } \pi/2 < t \le \pi. \end{cases}$$

8. Hallar la longitud de arco de las siguientes curvas en el intervalo especificado:

(a) $y = \cosh x$, $x \in [0, x_0]$. [sol: $\operatorname{senh} x_0$.]

(b) $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$. [sol: 6.]

(c) $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ en el intervalo $t \in [0, 2\pi]$.

(d) $\alpha(t) = (1, 3t^2, t^3)$, para $t \in [0, 1]$.

(e) $\alpha(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}})$ con $t \in [0, 1]$.

(f) $\alpha(t) = (t + 1, \frac{2\sqrt{2}}{3} + 7, \frac{1}{2}t^2)$ para $t \in [1, 2]$.

(g) $\alpha(t) = (t, t, t^2)$ con $t \in [1, 2]$.

(h) $\alpha(t) = (t, t\sin t, t\cos t)$ entre los puntos $(0, 0, 0)$ y $(\pi, 0, -\pi)$.

9. Hallar los valores de t para los cuales la curva

$$\alpha(t) = (2t^3 - 3t^2, t - 2\arctan t)$$

a) Tiene tangente horizontal

b) Tiene tangente tangente vertical