Facultad de Ingeniería. IMERL.
Cálculo 3. Semestre impar, 2018.

PRÁCTICO 5

Superficies paramétricas

1. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica $\Phi(u,v) = (u^2, u\sin e^v, \frac{1}{3}u\cos e^v)$ en el punto $(13,2,1)$.

2. Determinar en qué puntos son regulares las siguientes superficies paramétricas:

   a) $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$
   b) $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$

3. Dada una esfera de radio 2 centrada en el origen, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\sqrt{2})$ considerando la esfera como:

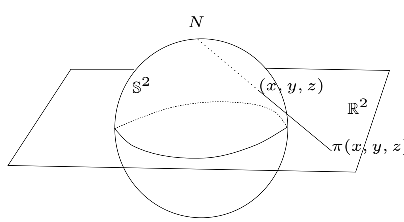
   a) una superficie parametrizada por $\Phi(\theta,\phi) = (2\cos\theta\sin\phi, 2\sin\theta\sin\phi, 2\cos\phi)$
   b) un conjunto de nivel de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
   c) la gráfica de $g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

4. Encontrar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \sin v, \qquad y = u \qquad z = \cos v$$

   con $v \in [0,2\pi]$ y $u \in [-1,3]$. Identificar la superficie.

5. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
   Consideremos la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, y la función $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\mathbb{R}^2$ representa el plano xy y $N = (0,0,1)$, definido de la siguiente forma: $\pi(x,y,z)$ es punto donde la recta que une N con (x,y,z), corta al plano xy.



   a) Escribir explicitamente el mapa π.
   b) Verificar que

$$\pi^{-1}(u,v) = (\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2})$$

   es la inversa de π y que es una parametrización de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$.
   c) ¿Cómo podríamos cubrir toda la esfera con parametrizaciones?

6. Sea la función escalar $\varphi(x,y,z) = log(x^2+y^2)$ definida en el abierto $\Omega = \{(x,y,z)$ tal que $x^2 + y^2 \neq 0\}$. Calcular la integral de φ sobre un cilindro (sin tapas) de radio 1 y altura 1.

7. Consideremos una placa infinita cargada uniformemente, coincidente con el plano yz de $\mathbb{R}^3$, y sea $E(x,y,z) = (\frac{\sigma}{2\epsilon_0}, 0, 0)$ el campo eléctrico generado por la placa en un punto cualquiera del espacio. Si la densidad de carga de la placa σ es constante, calcular el flujo de campo eléctrico a través de las siguientes superficies (recordar que ϵ_0 es constante):

a) El rectángulo de vértices $(0,0,1/2)$, $(1,0,1/2)$, $(0,0,1)$ y $(1,0,1)$.

b) El rectángulo de vértices $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ y $(1,1,1)$.

c) $\mathbb{S}^2 \cap \{(x,y,z) : x \geq 1\}$.

d) La esfera de centro $(1,1,1)$ y radio $1/2$

8. Se considera el recinto limitado por los planos $z = y$ y $z = 0$, y el cilindro $x^2+y^2 = a^2$. Hallar el área de la superficie cilíndrica que queda comprendida entre esos dos planos.

9. Se considera la lámina helicoidal parametrizada mediante

$$\phi(r,\theta) = (rcos\theta, rsen\theta, \theta),\ \ \theta \in [0, 2\pi],\ \ r \in [0, 2\sqrt{2}].$$

La densidad de masa por unidad de área de la lámina es $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

a) Calcular la masa de la lámina.

b) Hallar el plano tangente a la lámina en el punto $\phi(2,0)$.

10. Calcular el área de la parte del paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano $z = 9$

11. En cada caso calcular la integral de f sobre la superficie S.

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$

b) $f(x,y,z) = z$, $S = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$

12. Probar que el área de la superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$ obtenida a girar la gráfica de una función $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$ alrededor del eje z es

$$2\pi \int_a^b u\sqrt{1 + f'(u)^2}du$$