PRÁCTICO 4

1. Usando el teorema de Green calcular el área dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Sean $U = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) : xy + 1 = 0\}$ y $F : U \to \mathbb{R}^2$ el campo

$$F(x, y) = \left(\frac{1 - y^2}{(1 + xy)^2}, \frac{1 - x^2}{(1 + xy)^2} \right).$$

   (a) Hallar todos los potenciales escalares de F en U.

   (b) Calcular $\int_C F$ a lo largo de una curva en U que una el punto $(1, 1)$ con $(3, 2)$.

3. Sean $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$, los abiertos $U = \mathbb{R}^2 - \{p\}$ y $V = \mathbb{R}^2 - \{q\}$, $W = \mathbb{R}^2 - \{p, q\}$ y los campos $X : U \to \mathbb{R}^2$ e $Y : V \to \mathbb{R}^2$, $F : W \to \mathbb{R}^3$ tal que $F = X + Y$.
Se sabe que X e Y son irrotacionales. Sean I_p la circulación de X a lo largo de una curva cerrada simple en sentido antihorario que rodea a p e I_q la circulación de Y a lo largo de una curva cerrada simple en sentido antihorario que rodea a q.

   (a) Sea $C \subset W$ una curva cerrada simple, en sentido antihorario, probar que:

      (i) $\int_C F = 0$, si C no rodea a p ni a q.

      (ii) $\int_C F = I_p$, si C rodea a p y no a q.

      (iii) $\int_C F = I_p + I_q$, si C rodea a p y a q.

   (b) Calcular $\int_C F$ en función de I_p e I_q si $C \subset W$ es una curva cerrada que da 3 vueltas en sentido antihorario alrededor de p y 2 vueltas en sentido horario alrededor de q.

   (c) Probar que el conjunto de valores que toma $\int_C F$ para las distintas curvas cerradas $C \subset W$ es $\{nI_p + mI_q : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

   (d) Probar que si $I_p = I_q = 0$ entonces F es un campo de gradientes.

4. Calcular $\displaystyle\int_C \left(\frac{-3y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{3(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{2(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right) dy$ a lo largo de una curva cerrada que dé 3 vueltas en sentido antihorario alrededor de $(-1, 0)$ y 2 vueltas en sentido horario alrededor de $(1, 0)$.

5. Sea $\mathbf{X}(x, y, z) = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y)$. Encontrar un potencial escalar para $\mathbf{X}$.

6. Sea $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, demostrar que:

   (a)
$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{(x, y, z)}{r^3}$$

   (b)
$$\nabla \wedge (x, y, z) = \operatorname{rot}(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

7. Sea el campo de fuerzas gravitatorio, definido para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$:

$$\mathbf{X}(x, y, z) = -\frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Demostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando una partícula se mueve desde (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) depende sólo de los radios $R_1 = \|(x_1, y_1, z_1)\|$ y $R_2 = \|(x_2, y_2, z_2)\|$.

8. Demostrar que si f función y $\mathbf{X}$ campo diferenciables, entonces:

$$\nabla \wedge (f\mathbf{X}) = \nabla f \wedge \mathbf{X} + f\nabla \wedge \mathbf{X}$$

es decir, $\mathrm{rot}(f\mathbf{X}) = \nabla f \wedge \mathbf{X} + f\,\mathrm{rot}(\mathbf{X})$

9. Calcular el rotor del campo

$$\mathbf{X}(x,y,z) = \frac{(yz, -xz, xy)}{x^2+y^2+z^2}$$

10. Demostrar que el campo $\mathbf{X}(x,y) = (y\cos x, x\sin y)$ no es de gradientes.

11. Demostrar que $\int_{\mathcal{C}} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 2\pi$ donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unidad.

    a) Concluir que $\mathbf{X}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ no es conservativo.

    b) Mostrar que, sin embargo $\mathrm{rot}(\mathbf{X}) \equiv (0,0)$ en su dominio. ¿Qué es lo que está ocurriendo? ¿ No entra en contradicción con el Teorema de equivalencia de campos irrotacionales y conservativos?

12. *a*) En las mismas hipótesis del teorema de Green, probar:

    $$\int\int_D div(X)dxdy = \int_{\partial D} < X, n > dl,$$

    donde $X = (P,Q)$ y $div(X) = P_x + Q_y$ (la región $D \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto acotado que tiene borde ∂D consistente es una curva cerrada simple y regular a trozos).

    b) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo C^1. Una solución de la ecuación diferencial $(\dot{x}, \dot{y}) = F(x,y)$ es una pareja de funciones reales $(x(t), y(t))$ que verifica la ecuación, es decir una curva plana que en cada punto es tangente al campo F. Una solución de la ecuación diferencial es periódica si esta curva es cerrada. Probar que si $div(F)$ es diferente de cero en todo punto de $\mathbb{R}^2$ entonces la ecuación no tiene soluciones periódicas.

13. Se considera el campo X definido en $\mathbb{R}^3$ menos el eje Oz dado por

$$\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right).$$

Calcular la circulación del campo X sobre la curva que se muestra en la figura:

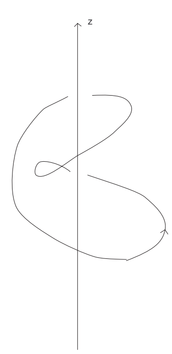

Figura 1: