ELECTROMAGNETISMO
PRÁCTICO 0
CÁLCULO VECTORIAL

Problema Nº 1

a) Demostrar que para una función escalar $\phi(\vec{r})$ se cumple: $d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{r}$, donde $d\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ y $d\phi = \phi(\vec{r}_0 + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$.

b) Sea C una curva en el espacio con parámetro de arco s y $\vec{t}$ el versor tangente a ella. Deducir que $d\phi/ds = \nabla\phi \cdot \vec{t}$ (la derivada direccional de ϕ sobre la curva C).

c) Demostrar que el vector gradiente es normal en todo punto a la superficie $\phi(\vec{r}) = cte$ (superficie equipotencial).

Problema Nº 2

Dado el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$, demostrar que $d\vec{F} = (d\vec{r} \cdot \nabla)\vec{F}$.

Problema Nº 3

a) Si $\phi(\vec{r})$ es una función que solo depende de la distancia $r = |\vec{r}|$, demostrar que:

i. $\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{d\phi(\vec{r})}{dr} = \phi'(r)\hat{r}$

ii. $\nabla \cdot [\phi(\vec{r})\vec{r}] = 3\phi(r) + r\frac{d\phi(r)}{dr}$

iii. $\nabla \cdot \vec{r} = 3$

b) Si $\phi(\vec{r}) = 1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$, mostrar que $\nabla\phi(\vec{r}) = -(\vec{r} - \vec{r}\,')/|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3$.

c) Mostrar que $\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (donde ∇ actúa sobre $\vec{r}$ y ∇' sobre $\vec{r}\,'$).

Problema Nº 4 (usar tabla 5)

Demuestre las siguientes igualdades aplicando del teorema de la divergencia o el teorema de Stokes (ver sugerencias abajo). Observe que son integrales de vectores, dando por resultado un vector.

a) $\int_V \nabla\phi dV = \oint_S \phi d\vec{A}$

b) $\int_V \nabla \times \vec{B}\, dV = \oint_S d\vec{A} \times \vec{B}$

c) $\oint_C d\vec{l} \times \vec{B} = \int_S \left(d\vec{A} \times \nabla\right) \times \vec{B}$ (C es la curva que delimita la superficie S)

Sugerencias: (parte a) considere un campo $\vec{F} = \phi\vec{c}$, con $\vec{c}$ una constante arbitraria, y aplique el teorema de la divergencia. (parte b) considere un campo $\vec{F} = \vec{B}x\vec{c}$, con $\vec{c}$ una constante arbitraria, y aplique el teorema de la divergencia. (parte c) considere un campo $\vec{F} = \vec{B}x\vec{c}$, con $\vec{c}$ una constante arbitraria, y aplique el teorema del rotor (Stokes).

Problema Nº 5

Dado un campo vectorial $\vec{F}$ y un campo escalar ϕ arbitrarios, demuestre que $\nabla \cdot [\nabla \times F] \equiv 0$ y que $\nabla \times (\nabla\phi) \equiv \vec{0}$. Sugerencia: es posible hacer las demostraciones usando coordenadas cartesianas.

Problema Nº 6

Demostrar las identidades de Green considerando dos campos escalares arbitrarios ϕ y ψ, donde S es la superficie que encierra al volumen V:

$$\int_V (\nabla\phi \cdot \nabla\psi)\, dV + \int_V \psi\nabla^2\phi\, dV = \oint_S \psi\, \nabla\phi \cdot d\vec{A} \quad (1ra\ identidad)$$

$$\int_V (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi)\, dV = \oint_S (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) \cdot d\vec{A} \quad (2da\ identidad)$$

Sugerencia: Considere $\psi\nabla\phi$ y $\phi\nabla\psi$ y aplique el teorema de la divergencia.