Análisis de sistemas no lineales:

Presentación

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales
Primer semestre - 2023

Contenido

Análisis y control de sistemas no lineales

- Asignatura de 10 créditos, es decir, 150 horas totales, que incluyen:
  - 48 horas de clase, mayoritariamente teóricas
  - 82 horas de trabajo personal (estudio personal, entrega de ejercicios, monografía final)
  - 20 horas de consulta y de presentación colectiva de monografías
- Válida para grado en las Ingenierías Eléctrica y Físico-Matemático, en la Licenciatura de Matemáticas y para los posgrados de Facultad de Ingeniería.
- Bibliografía:
  - Nonlinear Systems (H. Khalil);
  - Applied Nonlinear Control (J.J. Slotine);
  - Nonlinear Control Systems (A. Isidori);
  - Nonlinear Systems: analysis, stability, and control (S.S. Sastry);
  - Nonlinear Dynamical Systems and Control: a Lyapunov-Based Approach (V.M. Haddad, V. Chellaboina)

Forma de aprobación

- Habrá cuatro hojas de ejercicios que deberán ser entregados resueltos en las fechas establecidas.
- Monografía final individual, que puede consistir en el análisis de un artículo (o varios artículos relacionados), la profundización de algún tema del curso, el abordaje de un problema de interés personal, el trabajo sobre un modelo experimental, en los que sea necesario aplicar las técnicas estudiadas en el curso o el estudio de otras técnicas de análisis y control no vistas en el curso.
- Presentación final oral del trabajo realizado.

Objetivos

- Familiarizarse con las particularidades de los sistemas no lineales y sus diferencias y semejanzas con los sistemas lineales.
- Familiarizarse con algunas herramientas clásicas de análisis y control de sistemas no lineales.
- Profundizar en alguna técnica moderna de control no lineal.

Sistemas dinámicos

Sistema general: $\dot{x} = f(x, u, t)$, (t_0, x_0)

- $x \in \mathcal{R}^n$ es el estado.
- $u : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^m$ es la señal de entrada o señal de control.
- $t \in \mathcal{R}$ es el tiempo.
- x_0 y t_0 indican la condición inicial en el instante inicial.

Sistema realimentado: $\dot{x} = f(x, u(x), t) = \tilde{f}(x, t)$, (t_0, x_0)

- La señal de control es función del estado.
- Resulta un sistema variante en el tiempo, sin entradas.

Sistema autónomo: $\dot{x} = \tilde{f}(x)$, (t_0, x_0)

- El campo no depende explícitamente del tiempo.
- Las conclusiones del análisis no depende del instante inicial considerado.
- Sin pérdida de generalidad, suponemos $t_0 = 0$.

Sistemas dinámicos

Sistema a estudio

- Nos focalizaremos en el análisis del sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$.
- Esto equivale a suponer que no hay entradas o que las mismas ya han sido diseñadas como realimentaciones de estado.
- Denotaremos por $f^t(x)$ el tiempo t de la trayectoria del sistema que en $t = 0$ pasa por el punto x.
- Asumiremos en general que se cumplen las condiciones para que las trayectorias estén definidas para todo tiempo real.

Puntos de equilibrio

Puntos de equilibrio

- Interesan los puntos de equilibrio del sistema, es decir, puntos de velocidad nula:
$$0 = f(x, t)$$
- En particular, nos interesa la estabilidad de los puntos de equilibrio.
- Sobre este concepto nos centraremos buena parte del curso.

Sistemas lineales y no lineales

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ y el no lineal $\dot{x} = f(x)$.

Puntos de equilibrio

- Los puntos de equilibrio del sistema lineal son los vectores del $Ker(A)$; entonces, hay uno solo o infinitos.
- Un sistema no lineal puede no tener puntos de equilibrio, o tener un número finito mayor que 1:

$$\dot{x} = x.(1 - x)$$

Sistemas lineales y no lineales

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ y el no lineal $\dot{x} = f(x)$.

Tiempo de escape finito

- Las trayectorias de un sistema lineal siempre están definidas para todo instante de tiempo

$$x(t) = e^{At}x_0$$

- En un sistema no lineal, las trayectorias pueden no estar definidas para todo instante de tiempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow f^t(x) = \frac{1}{1-t} \quad , \quad t \in [0,1)$$

Sistemas lineales y no lineales

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ y el no lineal $\dot{x} = f(x)$.

Órbitas periódicas

- El comportamiento de las trayectorias de un sistema lineal queda biunívocamente definido por los autovalores y autovectores de A.
- En particular, si A es Hurwitz (todos sus autovalores con parte real negativa), todas las trayectorias convergen al origen.
- Si hay autovalores con parte real positiva, casi todas las trayectorias divergen.
- Si hay autovalores con parte real nula, entonces hay infinitas trayectorias periódicas:

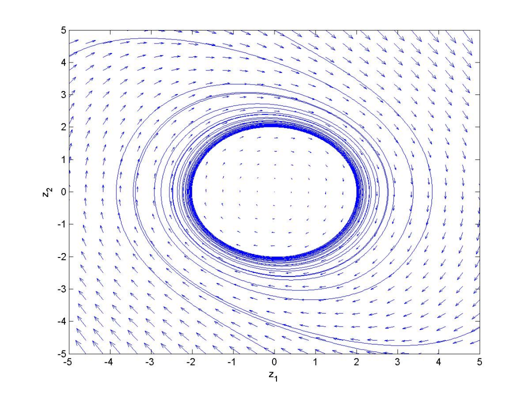
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 \end{array} \right. \Rightarrow f^t(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \dot{x}_1 & = R.\cos(t) \\ \dot{x}_2 & = R.\sin(t) \end{array} \right. \quad , \quad R = \|x_0\|$$

Sistemas lineales y no lineales

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ y el no lineal $\dot{x} = f(x)$.

Órbitas periódicas

- Los sistemas no lineales pueden tener una única órbita periódica que atraiga a todas las demás trayectorias (ciclo límite).
- Ecuación de Rayleigh $\ddot{z} - \epsilon\dot{z} + z = -\frac{\epsilon}{3}\dot{z}^3$:



Sistemas de segundo orden

- Se denominan así a los sistemas con estado $X = (x, y) \in \mathcal{R}^2$.
- Son relativamente sencillos de estudiar, debido a la dimensión del espacio.
- Numerosos sistemas físicos caen en esta categoría.

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f_1(x, y) \\ \dot{y} & = & f_2(x, y) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \dot{X} = F(X)$$

- El plano donde viven las trayectorias $F^t(x_0, y_0)$ se denomina plano de fase del sistema.
- El vector $F(X)$ representa el vector tangente a la curva solución.

Retrato de fase

La representación de las curvas solución para distintas condiciones iniciales se denomina retrato de fase y sirve para obtener una visión cualitativa de la dinámica del sistema.

Hay diversas maneras de obtener el retrato de fase:

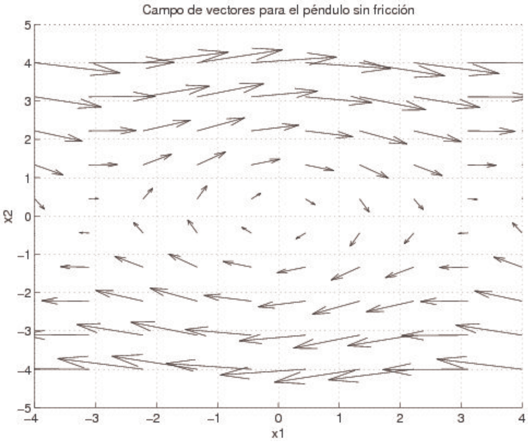
- Elegir una grilla de puntos en el plano y en cada uno de ellos dibujar el vector $F(X)$.
- Esto permite tener una idea de *para dónde* van las distintas trayectorias en distintas regiones del plano.
- El script pplane7.m o programas como el xpp-aut son muy útiles.

Ejemplo

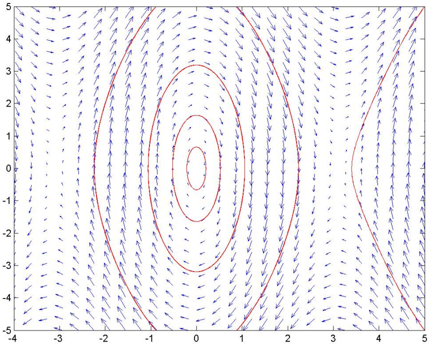
Péndulo simple

$$\begin{cases} \dot{x} & = & y \\ \\ \dot{y} & = & -mglsin(x) - cy \end{cases}$$

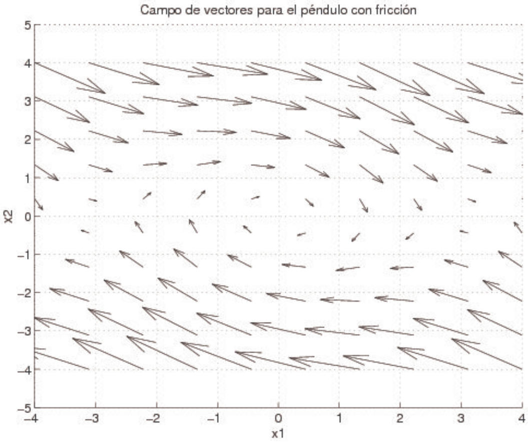
Ejemplo


Campo de vectores para el péndulo sin fricción
x2
x1
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

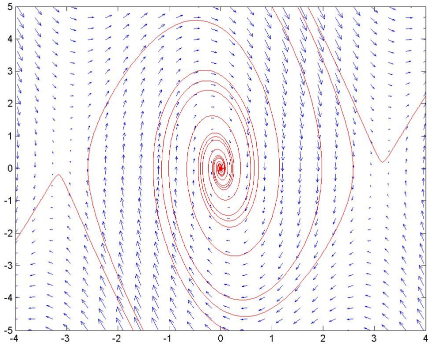
Ejemplo



Ejemplo


Campo de vectores para el péndulo con fricción
x2
x1
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Ejemplo



Retrato de fase

Método de las isóclinas

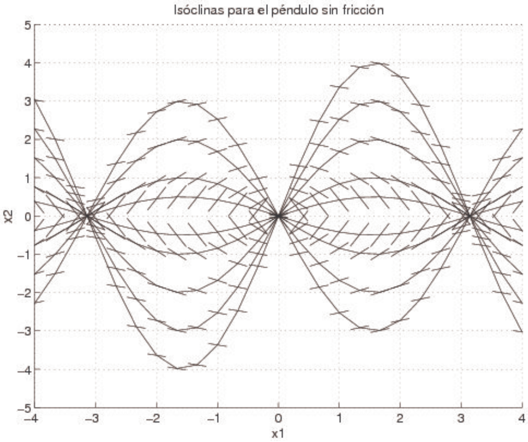
Consideremos la expresión

$$s(x,y) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} = \frac{dy}{dx}$$

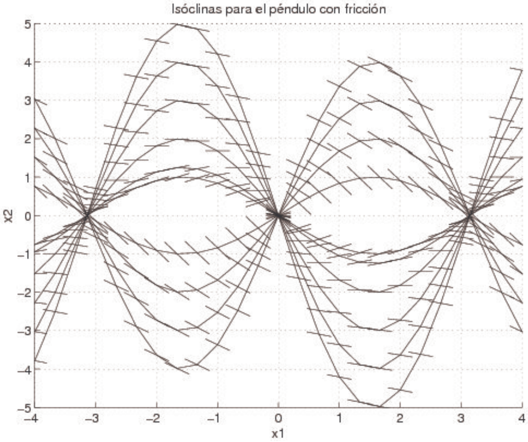
Nos da el valor de la pendiente de la tangente en un punto dado.
La curva $s(x,y) = c$, con c dado, es el lugar de los puntos de pendiente c (isóclina).
Para obtener una trayectoria en el retrato de fase, se pueden realizar los siguientes pasos:

- Dibujar las curvas $s(x,y) = c$ para diversos valores de c.
- Sobre dichas curvas dibujamos pequeños segmentos con la pendiente correspondiente.
- Partiendo de una condición inicial, vamos dibujando la curva solución, de manera que sea tangente a los segmentitos dibujados, moviéndonos desde una isóclina a la siguiente.

Isóclinas

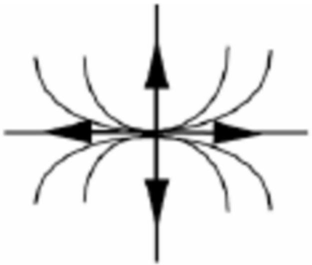

Isóclinas para el péndulo sin fricción
x2
x1
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Isóclinas


Isóclinas para el péndulo con fricción
x2
x1
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Clasificación de puntos de equilibrio

- Nodo
- Foco
- Centro

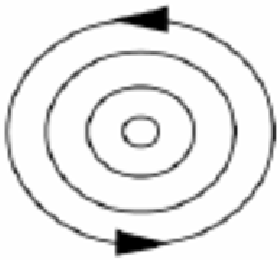


Clasificación de puntos de equilibrio

- Nodo
- Foco
- Centro

Clasificación de puntos de equilibrio

- Nodo
- Foco
- Centro



Resultados propios de sistemas planos

Teorema Bendixson

Si llamamos N al número de centros, nodos y focos del sistema y S al número de puntos sillas del sistema encerrados por un ciclo límite, entonces se debe verificar la siguiente relación:

$$N = S + 1$$

Criterio de Bendixson

Si $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ no es idénticamente nula y no cambia de signo en una determinada región a estudio del plano, que sea simplemente conexa, entonces dicha región no puede contener un ciclo límite.

La prueba se basa en el Teorema de Green. Como $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}$:

$$\int_\gamma f_2(x_1, x_2)dx_1 - f_1(x_1, x_2)dx_2 = 0 = \int\int_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Resultados propios de sistemas planos

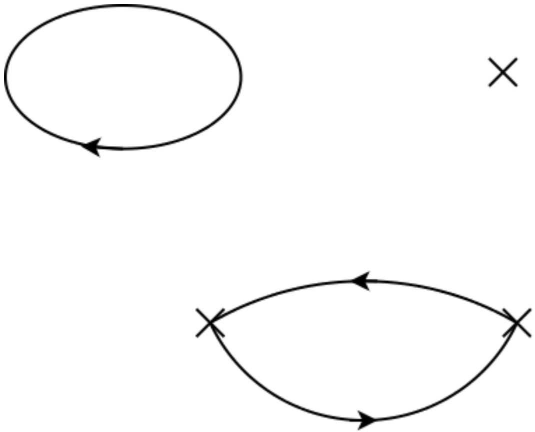
Teorema de Poincaré-Bendixson

Dado un sistema de segundo orden, si una trayectoria permanece acotada para todo tiempo positivo, entonces el ω-límite de la trayectoria:

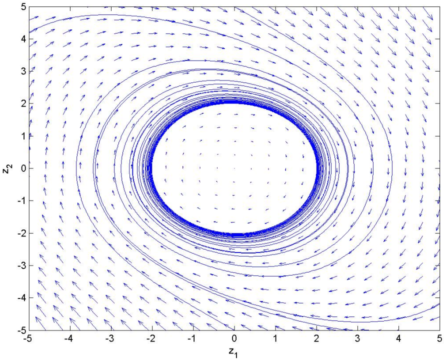
- es un ciclo límite;
- es un punto de equilibrio;
- es el conjunto formado por uno o dos más puntos de equilibrio y trayectorias que *se inician* en un punto de equilibrio y *terminan* en un punto de equilibrio.

Ver la definición de ω-límite y la demostración del Teorema en el Khalil.

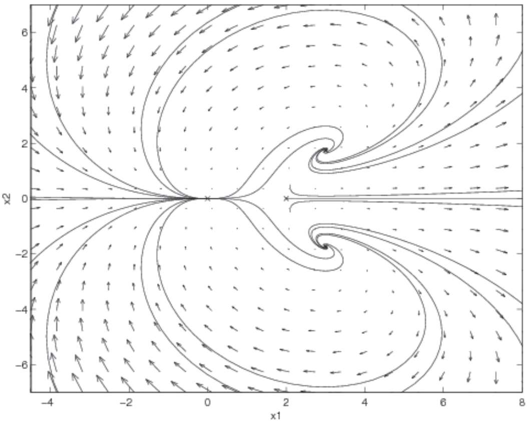
Teorema de Poincaré-Bendixson



Ejemplo: Ecuación de Rayleigh $\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -x + \epsilon(y - \frac{y^3}{3}) \end{array} \right.$



Ejemplos: $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -2x + x^2 - y^2 \\ \dot{y} & = & -6y + 2xy \end{array} \right.$



Ejemplos: Van der Pol $\begin{cases} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -x - \epsilon(1 - x^2)y \end{cases}$