Problema 2

En la figura 1, el transformador es simple, con autoinductancias L_1 y L_2 y mutua M.

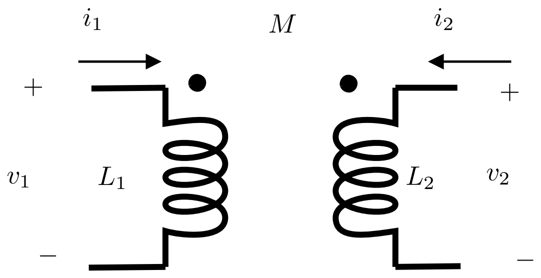

Figure 1:

1. Hallar una descripción de la forma: $\dot{I} = AV$ siendo $I = [i_1(t), i_2(t)]^T$ y $V = [v_1(t), v_2(t)]^T$.

   Como el transformador es simple, se cumple que:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Entonces: $\dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{v_2 - m\frac{di_1}{dt}}{L_2} \Rightarrow \dfrac{di_1}{dt} = \dfrac{L_2}{\Delta^2} v_1 - \dfrac{M}{\Delta^2} v_2 \Rightarrow \dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{L_1}{\Delta^2} v_2 - \dfrac{M}{\Delta^2} v_1$ con $\Delta^2 = L_1 L_2 - M^2$.

Entonces: $\begin{bmatrix} \dot{i_1} \\ \dot{i_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\Delta^2} & \frac{-M}{\Delta^2} \\ \frac{-M}{\Delta^2} & \frac{L_1}{\Delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

2. Asumiendo condiciones iniciales del primario y del secundario nulas:

   (a) Hallar la representación en matriz de admitancias de cortocircuito. Justificar.

   La expresión anterior, en Laplace:

   $sI \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\Delta^2} & \frac{-M}{\Delta^2} \\ \frac{-M}{\Delta^2} & \frac{L_1}{\Delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

   Entonces: $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = (sI)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\Delta^2} & \frac{-M}{\Delta^2} \\ \frac{-M}{\Delta^2} & \frac{L_1}{\Delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = YV$

   (b) Es el cuadripolo Reciproco? Justificar. La matriz es simetrica, SI lo es.

   (c) Es Simétrico? Justificar. NO, salvo que $L_1 = L_2$

Al circuito de la figura anterior se le conecta una resistencia R en el secundario, como en la figura 2.

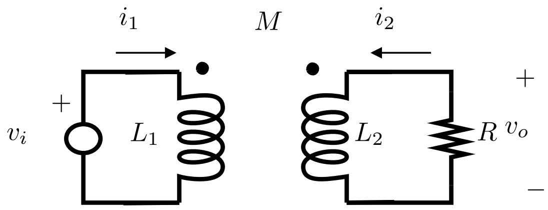

Figure 2:

3. Tomando como entrada v_i y como salida v_o, hallar una representación en variables de estado. Justifique.

   Sabiendo que $v_o = -Ri_2$:

   $$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\Delta^2} & \frac{-M}{\Delta^2} \\ \frac{-M}{\Delta^2} & \frac{L_1}{\Delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ -Ri_2 \end{bmatrix}$$

   $$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{RM}{\Delta^2} \\ 0 & \frac{-RL_1}{\Delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\Delta^2} \\ \frac{-M}{\Delta^2} \end{bmatrix} v_i$$

   $$\mathrm{v}_o = \begin{bmatrix} 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + 0v_i$$

4. (a) Es el sistema BIBO Estable? Justifique.
   La transferecia resulta: $C(sI-A)^{-1}B = \frac{RM}{\Delta^2(s+\frac{RL_1}{\Delta^2})}$ la cual resulta en un sistema BIBO estable.

   (b) Es el sistema internamente Estable? Justifique. NO, ya que tiene un valor propio nulo.

5. Considerando condiciones iniciales $i_1(0)$ e $i_2(0)$ no nulas y que $v_i(t) = 0V$ para todo t:

   (a) Hallar $v_o(t)$,$i_2(t)$ e $i_1(t)$ para todo tiempo positivo.
   Si $v_i(t) = 0V$: $\dot{i}_1 = \frac{RM}{\Delta^2} i_2$, $\dot{i}_2 = -\frac{RL_2}{\Delta^2} i_2 \Rightarrow i_2(t) = i_2(0)e^{-t\frac{RL_2}{\Delta^2}}$ $i_1(t) = i_1(0) + i_2(0)\frac{M}{L_2}(1 - e^{-t\frac{RL_2}{\Delta^2}})$

   (b) Hallar la energía que disipa la resistencia para todo tiempo positivo.
   $P_R(t) = Ri_2^2(t)$, $\frac{dE_R(t)}{dt} = P_R(t)$