Ejercicio 1

a. La salida del derivador funcionando en zona lineal es $v_o(t) = -\tau\dot{v}_i(t)$, esto vale mientras el operacional no sature. O sea mientras $\tau|\dot{v}_i| < V_{CC} \implies \boxed{\dot{v}_i < \frac{V_{CC}}{\tau}}$

b. Asumimos que en o^+ el operacional está saturado a $-V_{CC}$ (si el derivador fuera ideal tendríamos una delta negativa). La corriente inicial es 0 y la bobina y la resistencia conforman un circuito RL, por lo que el voltaje en la entrada negativa del operacional será de forma exponencial con valor inicial E (lo cual confirma que inicialmente el operacional comienza saturado negativamente) y valor final $-V_{CC}$ (en régimen la bobina es un cable):

$$e^-(t) = -V_{CC} + (E + V_{CC})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Tenemos que verificar la condición de saturación, hallamos t_1, el operacional estará saturado negativamente mientras:

$$\begin{aligned} e^- > e^+ = 0 \iff \quad & -V_{CC} + (E+V_{CC})e^{-\frac{t}{\tau}} > 0 \iff (E+V_{CC})e^{-\frac{t}{\tau}} > V_{CC} & (1)\\ \iff \quad & e^{-\frac{t}{\tau}} > \tfrac{V_{CC}}{E+V_{CC}} \iff -\tfrac{t}{\tau} > \ln\tfrac{V_{CC}}{E+V_{CC}} \iff t < \tau\ln\left(\tfrac{E}{V_{CC}}+1\right) & (2) \end{aligned}$$

O sea que el tiempo en que el operacional deja de saturar es $t_1 = \tau\ln\left(\frac{E}{V_{CC}}+1\right)$

Tenemos que calcular la corriente en la bobina para tener el dato previo para el siguiente intervalo, dicha corriente también tendrá una forma exponencial con valor inicial nulo y valor final $\frac{E+V_{CC}}{R}$:

$$i_L(t) = \frac{E+V_{CC}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \forall t \in (0, t_1) \tag{3}$$

$$\implies i_L(t_1) = \frac{E+V_{CC}}{R}\left(1 - e^{-\ln\left(\frac{E}{V_{CC}}+1\right)}\right) = \frac{E+V_{CC}}{R}\left(1 - \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{E}{V_{CC}}+1\right)}}\right) \tag{4}$$

$$= \frac{E+V_{CC}}{R}\left(1 - \frac{V_{CC}}{E+V_{CC}}\right) = \frac{E}{R} \tag{5}$$

Para el siguiente intervalo asumimos el operacional funcionando en zona lineal, con esta suposición el operacional se comporta como un derivador por lo que la salida será $v_o = 0$ que está dentro de la zona de linealidad. Además calculamos $i_L(t)$

$$v_L(t) = 0 \implies i_L(t) = \text{cte} = i_L(t_1^-) = \frac{E}{R} \quad \forall t > t_1 \tag{6}$$

Resumiendo:

$$v_o(t) = \begin{cases} -V_{CC} & t \in (0, t_1) \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \tag{7}$$

$$i_L(t) = \begin{cases} \frac{E+V_{CC}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & t \in (0, t_1) \\ \frac{E}{R} & t > t_1 \end{cases} \tag{8}$$

En la figura 1 se muestra la gráfica de estas señales.

c. En el primer intervalo ($t \in (0, \frac{T}{2})$) estamos en las mismas condiciones de la parte anterior por lo que valen las mismas cuentas, además el sistema llega al estado de régimen con entrada escalón.

Resta entonces ver que pasa para $t > t_1$.

Consideramos ahora el origen de tiempos en $\frac{T}{2}$ ($t' = t - \frac{T}{2}$). El dato previo de la bobina es $i_L(0^-) = \frac{E}{R}$. Por lo tanto el voltaje inicial en la entrada negativa será $e^-(o) = 0 - Ri_L(0) = -E$.

Se verifica entonces que el derivador comienza este intervalo saturado positivamente ($e^-(0) = .E < 0 = e^+$).

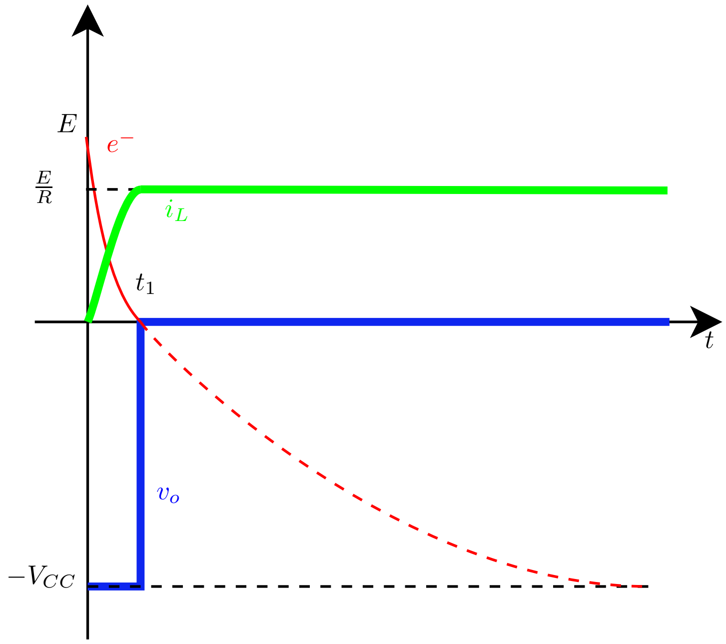

Figura 1: respuesta del derivador al escalón

En estas condiciones estamos nuevamente en un sistema RL de primer orden por lo que las soluciones para corrientes y voltajes serán exponenciales con constante de tiempo τ.

En este intervalo el valor final de la corriente por la bobina será $\frac{-V_{CC}}{R}$.

Lo siguiente se cumple mientras el operacional permanezca saturado.

$$v_o(t') = V_{CC} \tag{9}$$

$$e^-(t') = V_{CC} + (-E - V_{CC})e^{-\frac{t'}{\tau}} = V_{CC} - (E + V_{CC})e^{-\frac{t'}{\tau}} \tag{10}$$

$$i_L(t') = \frac{-V_{CC}}{R} + \left(\frac{E}{R} + \frac{V_{CC}}{R}\right)e^{-\frac{t'}{\tau}} = \frac{-V_{CC} + (E + V_{CC})e^{-\frac{t'}{\tau}}}{R} \tag{11}$$

Tenemos que hallar el instante en el cual el operacional deja de estar saturado, dado que la expresión para $e^-(t')$ es exactamente la opuesta al intervalo anterior, el momento en que $e^-(t')$ llegue a cero será nuevamente $t' = t_1$.

Haciendo cuentas llegamos a que $i_L(t' = t_1) = 0$, al igual que en el semiperíodo anterior.

En el siguiente intervalo volvemos a tener al operacional funcionando en zona lineal, y al finalizar el período estamos en las mismas condiciones que al inicio, por lo el sistema ya estará en régimen.

d. Debido al diodo, el integrador de la figura, va a integrar solo cuando la salida del derivador sea negativa. Por lo que en cada período el integrador, integra una constante V_{CC} hasta t_1.

La salida del integrador entonces será en cada período una rampa, con valor inicial el valor al que llegó en el intervalo anterior y de pendiente $\frac{V_{CC}}{\tau}$.

En cada período la salida del integrador se incrementara en $\frac{V_{CC}}{\tau}t_1 = \frac{V_{CC}}{\tau}\tau\ln\left(\frac{E}{V_{CC}} + 1\right) = \frac{V_{CC}}{\tau}\tau\ln\left(e^{\frac{1}{3}} - 1 + 1\right) = \frac{1}{3}V_{CC}$. Por lo que el integrador saturará en el tercer período y luego permanecerá en un voltaje constante $v_o = V_{CC}$