Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Curso anual 2017**

SEGUNDO PARCIAL – LUNES 26 DE JUNIO DE 2017 SOLUCIÓN

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 24 puntos.
- La duración del parcial es dos horas y media.

Ejercicio 1: (10 puntos)

Investigue si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. (Si considera que es verdadera escriba una prueba y si considera que es falsa muestre un contraejemlo).

Afirmación 1: : Sean u, v, w vectores en $\mathbb{R}^3$. Si el producto vectorial $u \wedge v$ es ortogonal a w, entonces al menos uno de los vectores u, v es ortogonal a w.

SOLUCIÓN: Es falsa. Tomar por ejemplo $u = e_1$, $v = e_2$ y $w = e_1 + e_2$.

Afirmación 2: Existen matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tales que $rango(A) < n$, $rango(B) < n$ y $rango(AB) = n$.

SOLUCIÓN: Es falsa. Si A y B tienen rango menor que n entonces tienen determinantes nulos. Por lo tanto el determinante de AB también sería cero lo que implica que AB no puede tener rango n.

Afirmación 3: Si $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto ortonormal entonces es linealmente independiente.

SOLUCIÓN: Es verdadera. Ver teórico.

Afirmación 4: Los planos $\pi : x + y - z = 2$ y $\pi' = \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases}$ son paralelos.

SOLUCIÓN: Es verdadera. Basta observar que los vectores directores de π' son ortogonales al vector normal de π.

Afirmación 5: Para todo par de vectores X e Y de $\mathbb{R}^3$ se cumple $\langle X + Y, X - Y\rangle = ||X||^2 - ||Y||^2$.

SOLUCIÓN: Es verdadera. Usando las propiedades del producto escalar tenemos:
$\langle X + Y, X - Y\rangle = \langle X, X - Y\rangle + \langle Y, X - Y\rangle = \langle X, X\rangle - \langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle - \langle Y, Y\rangle = ||X||^2 - ||Y||^2$

Ejercicio 2: (4 puntos)

Sean A y B matrices 3×3 tales que $det(A) = 2$ y $det(B) = -3$. Halle $det(3A^tB^{-1}A^2)$, explicitando las propiedades que utiliza en cada paso.

Solución: $det(3A^tB^{-1}A^2) = 3^3 det(A^tB^{-1}A^2) = 3^3 det(A^t)det(B^{-1})det(A^2) = 3^3 det(A)\frac{1}{det(B)}det(A)^2 = 3^3\frac{det(A)^3}{det(B)} = 3^3 2^3/-3 = -72$.

Ejercicio 3: (4 puntos)

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Discuta el rango de A según el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución: El rango de A vale 3 si $\alpha \neq 2, -2$ y vale 2 si $\alpha = 2$ o $\alpha = -2$.

Ejercicio 4: (6 puntos)

Considere el punto $A = (1, 1, 2)$, la recta s de ecuaciones reducidas:

$$s)\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

y la recta t de ecuaciones paramétricas:

$$t)\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

a) Halle las ecuaciones **paramétricas** de la recta r que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralela a la recta s.

b) Halle la ecuación **reducida** del plano π que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y que contiene a la recta t.

c) Calcule la distancia del punto A al plano π.

Solución:

a) De las ecuaciones reducidas de s podemos obtener como vector director para r el vector $(1, 1, -3)$. Entonces, por ejemplo

$$r)\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

b) Como π pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y contiene a la recta t, podemos hallar su vector normal considerando el producto vectorial de $v = (1, 1, 3)$ (el vector director de t) y el vector $P - Q$ donde $Q = (1, -1, 0)$ es el punto de paso de t. Esto nos da $n = (5, 1, -2)$. Finalmente, como $P \in \pi$, la ecuación reducida de π es $5x + y - 2z - 4 = 0$.

c) La distancia del punto A al plano π es $d(A, \pi) = 2/\sqrt{30}$.