Segundo parcial de Lógica

04 de julio 2016

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Parte A

Ejercicio 1 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 2, 2; 1, 2; 1\rangle$ con símbolos de predicado P y Q, símbolos de función f (unario), g (binario) y símbolo de constante c. Sean A, B estructuras del mismo tipo definidas como sigue:
$A = \langle \mathbb{N}, \leq, \geq, S, +, 0\rangle$, donde $S(x) = x + 1$
$B = \langle \mathbb{N}, \leq, \geq, D, *, 1\rangle$, donde $D(x) = 2 * x$

a. Escriba (sin usar constantes extendidas) dos términos t_1, t_2 tal que $t_1^A = t_2^B$

b. Aplicar la siguiente sustitución: $(\forall x)(P(x, y) \rightarrow (\forall y)Q(y, y))[g(z, y)/y]$.

c. Encuentre una fórmula σ tal que: $\sigma[f(y)/y] = (\forall y)f(y) =' c \rightarrow P(f(y), f(y))$.

d. Demuestre por inducción que para todo término cerrado t (sin constantes extendidas) se cumple que $t^B = 2^{t^A}$.

Parte B

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 1,2,2;-;1\rangle$. Definimos:

$\varphi_1 :\ = (\exists x)P_1(x)$ $\varphi_2 :\ = (\exists x)(\exists y)(\neg P_2(x,y))$ $\varphi_3 :\ = (\forall x)(P_1(x) \to \exists y P_2(x,y))$ $\varphi_4 :\ = (\forall x)(\forall y)(\neg(P_1(x) \leftrightarrow P_2(x,y)))$ $\varphi_5 :\ = (\forall w)(P_1(w) \to (\forall z)(\neg P_2(w,z)))$ $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$	$M_1 =< \mathbb{N}, \mathbb{N}, \geq, \leq, 0 >$ $M_2 =< \{\bullet, \circ\}, \{\}, \{(\bullet, \circ)\}, \{(\circ, \circ)\}, \circ >$ $M_3 =< \{\bullet, \circ\}, \{\bullet, \circ\}, \{(\bullet, \bullet), (\bullet, \circ), (\circ, \bullet), (\circ, \circ)\}, \{(\circ, \circ)\}, \circ >$

Decimos que M es Gamera sii $M \models \Gamma$.

Ejercicio 2 (15 puntos)

a. Demostrar que M_1 es Gamera.
b. Investigar si M_2 y M_3 son Gameras. Justifique.
c. Demostrar que $\Gamma \not\models \varphi_4$.

Ejercicio 3 (15 puntos)

a. Construya la derivación que prueba $\Gamma \cup \{(\forall x)(\forall y)(P_3(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y))\} \vdash (\exists x)(\exists y)(\neg P_3(x,y))$.
b. Probar que $\Gamma \cup \{\varphi_5\}$ es inconsistente.
c. Demostrar que si M es Gamera, entonces $M \not\models \varphi_5$.

Ejercicio 4 (15 puntos)

a. Investigar si $CONS(\Gamma)$ es consistente maximal. Justifique su respuesta.
b. Demuestre que M es Gamera si y solo si $M \in Mod(\{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3\})$.
c. Hallar $\psi \in Th(Mod(\Gamma))$ y $\sigma \notin Th(Mod(\Gamma))$. Justifique.