Segundo parcial de Lógica

11 de julio 2014

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea el lenguaje de primer orden con igualdad definido por el tipo de similaridad $\langle 2; 2; 1\rangle$, con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constantes c.

Considere la siguiente definición de subtérmino: Se dice que t' es subtérmino de t si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $t' = t$.
- t es de la forma $f(t_1, t_2)$ y t' es subtérmino de t_1 o de t_2.

a. Dé la definición inductiva del conjunto de términos del lenguaje ($\mathtt{TERM}$).

b. Dé la definición recursiva de la función $FV : \mathtt{TERM} \to 2^V$ que devuelve las variables de un término del lenguaje.

c. Demuestre por inducción en $\mathtt{TERM}$ que $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM})((\bar{\forall} t' \in \mathtt{TERM})(t'$ es subtérmino de $t \Rightarrow FV(t') \subseteq FV(t)))$.

d. Dé la definición recursiva de la función $FV : \mathtt{FORM} \to 2^V$ que devuelve las variables libres de una fórmula del lenguaje.

e. ¿Se cumple que $(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{FORM})((\bar{\forall}\psi \in \mathtt{FORM})(\psi$ es subfórmula de $\varphi \Rightarrow FV(\psi) \subseteq FV(\varphi)))$? Justifique.

Nota: La noción de subfórmula en $\mathtt{FORM}$ es análoga a la definición de subfórmula en $\mathtt{PROP}$ donde se agrega la regla:

Las subfórmulas de $(\forall x)\alpha$ son las subfórmulas de α y $(\forall x)\alpha$. Análogamente para $(\exists x)\alpha$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle -; 1; 0\rangle$ con símbolo de función f.

a. Considere una estructura $\mathcal{M}_1 = \langle U, F\rangle$ de tipo de similaridad $\langle -; 1; 0\rangle$. Decimos que F tiene al menos un punto fijo si existe un elemento a de U, tal que $F(a) = a$. Dar una fórmula de `FORM` que indique que F tiene al menos un punto fijo.

b. Considere la siguiente familia de términos:

$$\begin{array}{lcl} t_0 & := & x \\ t_{n+1} & := & f(t_n) \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

   I. Dé una estructura $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \models (\exists x)t_2 =' x$ y $\mathcal{M}_2 \not\models (\exists x)t_1 =' x$ Justifique su respuesta.

   II. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   1. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple: $(\exists x)t_0 =' x \models (\exists x)t_{k+1} =' x$
   2. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple: $(\exists x)t_1 =' t_0 \models (\exists x)t_{k+1} =' t_k$

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguiente juicios.

a. $(\forall x)P(x, g(x)) \vdash (\forall x)(\exists y)(P(x, y) \wedge y =' g(x))$

b. $(\forall x)\neg(\exists y)(P(x, y) \wedge \neg y =' f(x)) \vdash (\forall x)P(x, g(x)) \to \neg(\exists x)\neg g(x) =' f(x)$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere una fórmula $\varphi \in$ `SENT` y una estructura $\mathcal{M}$ fijas, tales que $\mathcal{M} \models \varphi$.

a. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   I. $Th(\{\mathcal{M}\}) = \{\varphi\}$

   II. $\textsc{Cons}(\{\varphi\}) \subseteq Th(\{\mathcal{M}\})$

   III. $Mod(\{\varphi\}) \subseteq Mod(\texttt{SENT})$

b. Dar dos conjuntos $\Gamma, \Delta \subseteq$ `SENT` tales que $\Delta \subset \Gamma$ y $\textsc{Cons}(\Delta) = \textsc{Cons}(\Gamma)$