

Lógica

Segundo parcial

Julio 2006

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- Toda respuesta debe estar fundamentada. Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de estudiante, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Atención: Cada ejercicio está antecedido por una pregunta obligatoria marcada con un asterisco (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

Ejercicio 1 (15 pts)

Pregunta * Considere un lenguaje con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0 \rangle$. Defina *TERM*.

Sea un lenguaje con el tipo de similaridad de la pregunta *.

1. Defina la función de sustitución en *TERM*.
2. Usando el principio de inducción, pruebe que para todo $t \in \text{TERM}$: $\models t[x_0/x_0] = ' t$

Ejercicio 2 (15 pts)

Sea la estructura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, R, \text{mín} \rangle$, donde $\text{mín} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es la función que devuelve el mínimo de dos naturales y R es una relación de equivalencia.

Pregunta * Escriba la siguiente afirmación en primer orden:

R cumple la propiedad reflexiva.

Indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos. Justifique.

- i. $\mathcal{A} \models \forall x P(x, f(x, x))$
- ii. $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)) \models \forall z (P(x, z) \rightarrow \neg x \doteq z)$

Ejercicio 3 (15 pts)

Pregunta * Escriba la regla de eliminación del cuantificador universal ($\forall E$).

1. Etiquete las reglas en el siguiente árbol, y diga por qué no es una derivación correcta.

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x \exists y P(x, y)]^1}{\exists y P(f(x), y)} ?}{\exists y \forall z P(f(z), y)} ?}{\frac{\frac{[P(f(z), y)]^2}{\forall z P(f(z), y)} ?}{\exists y \forall z P(f(z), y)} ?_2}{\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall z P(f(z), y)} ?_1$$

2. Construya una derivación para probar que

$$\vdash \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(f(y))) \rightarrow \exists x P(f(x)) \rightarrow \exists x Q(x).$$

Ejercicio 4 (15 pts)

Pregunta * Sea $\Gamma \subseteq SENT$, defina $Mod(\Gamma)$.

Sean $\Gamma \subseteq SENT$ y $\Delta \subseteq SENT$:

Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas. En cada caso justifique su respuesta.

1. Si $Mod(\Gamma \cap \Delta) = \emptyset$ entonces Γ es inconsistente y Δ es inconsistente.
2. Si Γ es consistente entonces $Th(Mod(\Gamma))$ es consistente.