Lógica

Segundo Parcial

Julio 2003

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Atención : Cada ejercicio está antecedido por una **pregunta obligatoria** marcada con una estrella (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta
no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

Problemas

Ejercicio 1 (12 puntos)

Pregunta (*) Considere un lenguaje de primer orden del tipo <1 ; 1,2 ; 2> con un símbolo de predicado P_1 (unario), símbolos de función f_1 (unario) y f_2 (binario) y símbolos de constante c_1 y c_2. Defina inductivamente el conjunto TERM de los términos pertenecientes a dicho lenguaje.

(a) Defina recursivamente una función H: TERM $\rightarrow$ TERM tal que dado t $\in$ TERM, reemplace en t cada ocurrencia de un término atómico (variable o constante) por c_2.

Ejemplos: $H(f_1(f_2(x_1, c_1))) = f_1(f_2(c_2, c_2))$

$$H(f_2(f_1(c_2), x_2)) = f_2(f_1(c_2), c_2)$$

(b) Sea A = <N, {x∈N | x es par}, ^{2}, +, 1, 2> una estructura de tipo <1 ; 1,2 ; 2> donde N es el conjunto de los números naturales, $\_^2$ es la función cuadrado y + es la función suma. Demuestre por inducción la siguiente propiedad:

$$\text{Para todo } t \in \text{TERM}, A \models P(H(t))$$

Ejercicio 2 (18 puntos)

Pregunta (*) Considere un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P (unario). Sea M una estructura del tipo adecuado para dicho lenguaje. Defina $v^M (t_1 =' t_2)$ y $v^M (P(t_1))$ para cualesquiera t_1 , t_2 términos cerrados del lenguaje.

(a) Exprese con una fórmula φ de primer orden que *existen solamente dos elementos distintos que cumplen P*.

(b) Proponga una estructura A del tipo <1;–;0> que cumpla simultáneamente las siguientes dos condiciones:

- $A \models \varphi$
- El conjunto $|A|$ posee al menos tres elementos

Pruebe que la estructura A propuesta cumple con lo pedido.

(c) Demuestre que no existe ninguna estructura B del tipo <1;–;0> que cumpla simultáneamente las siguientes dos condiciones:

- $B \models \varphi$
- $B \models \forall x \forall y\, (x =' y)$

Ejercicio 3 (15 puntos)

Pregunta (*) Enuncie la regla de *eliminación del para todo* ($\forall_E$), explicitando las restricciones correspondientes para las variables.

(a) Sean Γ, Δ subconjuntos arbitrarios de FORM y sean α∈FORM y β∈FORM fórmulas tales que: $\Gamma \vdash \forall x\, (\alpha \to \beta)$ y $\Delta \vdash \forall x \alpha$. Pruebe que: $\Gamma \cup \Delta \vdash \exists x \beta$.

(b) Sean α , β fórmulas de FORM tales que $y \notin FV(\alpha)$. Construya una derivación de :

$$\vdash \exists y\, (\alpha \wedge \beta) \to \neg \forall x\, (\neg \alpha \vee \forall y\, (\neg \beta))$$

Todo paso de la derivación debe estar justificado con el nombre de la regla empleada y en caso de que la regla lo exija se deben explicitar las restricciones correspondientes para las variables. En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (15 puntos)

Pregunta (*) Enuncie el *teorema de completitud* para la lógica de predicados.

Se dice que dos conjuntos $\Gamma, \Delta \subseteq$ SENT son *paralelamente consistentes* ssi se cumple que: Mod (Γ) = Mod (Δ).

(a) Considere un lenguaje de primer orden del tipo <1,1 ; – ; 0> con símbolos de predicado P (unario) y Q (unario). Sean los siguientes conjuntos:

- $\Gamma = \{\forall x\, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))\ ,\ \forall x\, \mathrm{P}(x)\}$
- $\Delta = \{\forall x\, \mathrm{P}(x)\ ,\ \forall x\, \mathrm{Q}(x)\}$

Demuestre que Γ y Δ son paralelamente consistentes.

(b) Demuestre que para cualquier conjunto $\Gamma \subseteq$ SENT se cumple que Γ y Cons(Γ) son paralelamente consistentes. (Recuerde que Cons(Γ) se define como $\{ \varphi \in \mathrm{SENT} \mid \Gamma \vdash \varphi \}$)