Instituto de Computación **Facultad de Ingeniería**

Lógica
Segundo Parcial
Julio 2002

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3) horas**.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60 puntos**.
- Pueden usarse los resultados que aparecen tanto en el texto como en el material práctico y/o teórico del curso; en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Atención : cada ejercicio está antecedido por una **pregunta obligatoria** marcada con una estrella (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

Ejercicio 1 (12 puntos)

Pregunta (*) Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 1; 1; 1\rangle$ con un símbolo de predicado P, un símbolo de función f y un símbolo de constante $\bar{c}$. Defina inductivamente el conjunto $\mathsf{TERM_C}$ de los términos cerrados pertenecientes a dicho lenguaje.

Sea $\mathcal{A}$ una estructura del tipo $\langle 1; 1; 1\rangle$ definida como

$$\mathcal{A} := \langle N, \{n \in N | n \text{ es par}\}, F, 0\rangle, \text{ con } F(n) := n + 2.$$

Demuestre por inducción que todo término cerrado $t \in \mathsf{TERM_C}$ cumple

$$\mathcal{A} \models P(t).$$

Ejercicio 2 (16 puntos)

Pregunta (*) Sea $\mathcal{M}$ una estructura y α una fórmula correspondiente a un lenguaje del tipo de $\mathcal{M}$ tal que $\mathsf{FV}(\alpha) \subseteq \{x\}$. Defina $v^{\mathcal{M}}(\forall x \alpha)$.

Recuerde que los dominios de las estructuras **no** pueden ser vacíos. Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 1; -; 0\rangle$ con un símbolo de predicado P. Sean las sentencias

$$\varphi := \exists x P(x) \to \forall x P(x)$$
$$\psi := \exists x \exists y (P(x) \land \neg P(y))$$

1. Dé estructuras $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ de tipo $\langle 1; -; 0\rangle$ tales que $\mathcal{A}_1 \models \varphi$ y $\mathcal{A}_2 \models \psi$. Justifique.
2. Sean $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ dos estructuras de tipo $\langle 1; -; 0\rangle$ tales que $\mathcal{M}_1 \models \varphi$ y $\mathcal{M}_2 \models \psi$. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones
   a) $\mathcal{M}_1 \models \psi$
   b) $\mathcal{M}_2 \models \varphi$
   c) $\mathcal{M}_1 \models \varphi \leftrightarrow \neg\psi$

Ejercicio 3 (16 puntos)

Pregunta (*) Defina $\Gamma \vdash \varphi$ con $\Gamma \subseteq \mathsf{FORM}$ y $\varphi \in \mathsf{FORM}$.

1. Sean Γ y Δ subconjuntos de FORM tales que para cualquier $\alpha \in \Gamma$ se tiene $\Delta \vdash \alpha$. Además, sea β tal que $\Gamma \vdash \beta$. Pruebe que $\Delta \vdash \beta$.
2. Construya una derivación de
$$\exists x(\varphi \leftrightarrow \neg\psi) \vdash \neg\forall x(\varphi \land \psi).$$
   Recuerde que se le solicita una derivación. Todo paso de la derivación debe justificarse con los nombres de la regla empleada, y en caso de que la regla lo exija se deben explicitar las restricciones correspondientes para variables. En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (16 puntos)

Pregunta (*) Defina $\mathsf{Mod}(\Gamma)$, siendo $\Gamma \subseteq \mathsf{FORM}$.

Sean $\Gamma \subseteq \mathsf{FORM}$ y $\Delta \subseteq \mathsf{FORM}$ tales que $\mathsf{Mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{Mod}(\Delta)$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta en todos los casos, con una demostración o un contraejemplo concreto, según corresponda.

1. $\mathsf{Cons}(\Gamma) \subseteq \mathsf{Cons}(\Delta)$
2. $\mathsf{Cons}(\Delta) \subseteq \mathsf{Cons}(\Gamma)$
3. Si Γ es consistente, entonces Δ es consistente.