Lógica
Segundo Parcial
Julio 2001

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3) horas y media**.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60 puntos**.
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos) Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 2, 1; 1\rangle$, con símbolos de función f_1 y f_2, y símbolo de constante $\bar{c}$. Sea $\mathcal{A} = \langle \mathrm{Z}, +, ^2, 1\rangle$ una estructura del mismo tipo, donde Z es el conjunto de los enteros, $+$ la suma, ^{2} el cuadrado. Demuestre por inducción que para todo término cerrado t sin constantes extendidas se cumple $t^{\mathcal{A}} > 0$.

Ejercicio 2 (20 puntos) Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 2; 1; 0\rangle$, con símbolo de relación R y símbolo de función f. Sea $\varphi \equiv R(x, y)$.

1. Dé estructuras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ del tipo $\langle 2; 1; 0\rangle$ tales que $\mathcal{A} \models \forall x \exists y \varphi$ y $\mathcal{B} \not\models \forall x \exists y \varphi$.
2. Considere la fórmula φ y las estructuras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de la parte anterior. Demuestre o refute la veracidad de las siguientes afirmaciones.
   a) $\mathcal{B} \models \forall x \exists y \varphi \rightarrow \exists x \exists y \varphi$
   b) $\mathcal{B} \models \forall x \exists y \varphi \rightarrow \exists y \forall x \varphi$
   c) $\models \forall x \exists y \varphi \rightarrow \exists y \forall x \varphi$

Ejercicio 3 (15 puntos) Construya una derivación de

$$\exists x(\neg\varphi \vee \psi), \forall x(\varphi \leftrightarrow \neg\psi) \vdash \exists x(\neg\varphi \wedge \psi)$$

Justifique cuando corresponda que las restricciones para las variables se cumplen al aplicar las reglas. Debe incluir el nombre de las reglas empleadas en la derivación. La derivación debe aparecer completa, o sea, sin utilizar ningún resultado visto en el curso.

Ejercicio 4 (15 puntos) Sea Σ un alfabeto para un lenguaje de primer orden, y $\Gamma \subseteq \mathsf{FORM}_\Sigma$ un conjunto consistente de fórmulas. Indique si las siguientes afirmaciones son correctas o incorrectas. Justifique su respuesta para todos los casos.

1. Para todo $\varphi \in \mathsf{FORM}_\Sigma$, si $\varphi \in Cons(\Gamma)$, entonces $\neg\varphi \notin Cons(\Gamma)$
2. Para todo $\varphi \in \mathsf{FORM}_\Sigma$, $\varphi \in Cons(\Gamma)$ o $\neg\varphi \in Cons(\Gamma)$
3. $Cons(\Gamma)$ es consistente maximal