Instituto de Computación **Facultad de Ingeniería**

Lógica
Segundo Parcial
Julio 1998

Indicaciones Generales
- La duración del parcial es de **cuatro (4)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de estudiante.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Problemas

Ejercicio 1. (8 pts.)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $< -; 2, 2; 2 >$ con símbolos de función s y p y símbolos de constante $\bar{c}$ y $\bar{d}$. Sea la estructura del mismo tipo $\mathcal{A}$ definida como sigue: $\mathcal{A} =< R, +, \times, 1, \sqrt{2} >$ (donde R es el conjunto de los números reales)

Demuestre por inducción que para todo término cerrado t se cumple que:

$$t^{\mathcal{A}} > 0$$

Ejercicio 2. (12 pts.)

Sean φ, ψ y χ fórmulas de un lenguaje primer orden tal que $FV(\varphi) = FV(\psi) = \{x\}$ y $FV(\chi) = \{x, y\}$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta para los casos en que ésta sea afirmativa, y dé un contraejemplo si su respuesta es negativa.

(a) $\models \forall x(\varphi\vee\psi)\rightarrow\forall x\varphi\vee\forall x\psi$

(b) $\models \exists x\varphi\wedge\forall x\psi\rightarrow\exists x(\varphi\wedge\psi)$.

(c) $\models \exists x\forall y\chi\rightarrow\exists y\exists x\chi$.

Ejercicio 3. (12 pts.)

Construya una derivación de $\forall x(\sigma\rightarrow\varphi) \vdash \exists x\sigma\rightarrow\exists x\varphi$. Justifique cuando corresponda que las restricciones sobre las variables se cumplen al aplicar las reglas.

Ejercicio 4. (16 pts.)

Sea L un lenguaje de primer orden de tipo $< 2;1;1 >$ con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante $\bar{c}$.

Considere T_1 y T_2 las teorías definidas como sigue:

- $T_1 \equiv CONS(\{\})$
- $T_2 \equiv CONS(\{P(t_1,t_2) \mid P(t_1,t_2) \in SENT\})$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta para los casos en que ésta sea afirmativa, y dé un contraejemplo si su respuesta es negativa:

(a) Para todo conjunto Γ, $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(CONS(\Gamma))$.

(b) T_1 es una teoría consistente.

(c) T_2 es una teoría consistente.

(d) T_2 es una extensión conservativa de T_1

Ejercicio 5. (12 pts.)

Considere las siguientes definiciones:

- Un conjunto A con una relación binaria $\leq$ sobre él constituyen un orden parcial (poset) si $\leq$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
- El ínfimo de dos elementos x e y de un poset A es un elemento $i{\in}A$ tal que $i{\leq}x$, $i{\leq}y$ y para todo $w{\in}A$ tal que $w{\leq}x$ y $w{\leq}y$ se cumple que $w{\leq}i$.
- El supremo de dos elementos x e y de un poset A es un elemento $s{\in}A$ tal que $x{\leq}s$, $y{\leq}s$ y para todo $w{\in}A$, tal que $x{\leq}w$ y $y{\leq}w$ se cumple que $s{\leq}w$.
- Un poset A es un reticulado (lattice) si cada par de elementos de A tiene supremo e ínfimo.

Considere un lenguaje L de tipo $< 2; 2, 2; - >$, con un símbolo de predicado M y símbolos de función I y S.

(a) Dé un conjunto de axiomas Γ_{RET} que defina la noción de reticulado (o sea, un conjunto de fórmulas Γ_{RET} tal que $Mod(\Gamma_{RET}) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ es un reticulado$\}$). Para ello, deberá dar:

  (i) Un conjunto de fórmulas que expresen que M es un orden parcial.

  (ii) Una fórmula que exprese que I denota a la función ínfimo, y otra que exprese que S denota la función supremo.

(b) Pruebe que $\Gamma_{RET} \vdash \forall x x \doteq I(x, x)$

(c) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta para los casos en que ésta sea afirmativa, y dé un contraejemplo si su respuesta es negativa:

  (i) Γ_{RET} es consistente.

  (ii) $\Gamma_{RET} \models \forall x \neg(S(x, x) \doteq x)$.