Segundo parcial de Lógica

Julio 2011

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle -; 2; 1\rangle$ cuyo alfabeto cuenta con el símbolo $='$, el símbolo de función f, el símbolo de constante $\bar{c}$, los conectivos $\neg$ y $\rightarrow$, el cuantificador universal $\forall$, y las variables y los símbolos auxiliares habituales. Considere además la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +, 1\rangle$.

a. Defina inductivamente el conjunto $\mathtt{TERM}$ de los términos y el conjunto $\mathtt{FORM}$ de las fórmulas correspondientes al lenguaje $\mathcal{L}$.

b. Defina una función $\mathtt{swap} : \mathtt{TERM} \rightarrow \mathtt{TERM}$ que intercambia los argumentos de cada símbolo de función f. Por ejemplo: $\mathtt{swap}(f(\bar{c}, f(x, y))) = f(f(y, x), \bar{c})$.

c. Demuestre inductivamente que $\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C, \mathcal{M} \models t =' \mathtt{swap}(t)$, donde $\mathtt{TERM}_C$ es el conjunto de los términos cerrados.

d. Indique si la siguiente oración es verdadera o falsa, justificando adecuadamente.

$$\bar{\forall} \varphi \in \mathtt{FORM}, \bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C, \mathcal{M} \models \varphi[t/x] \leftrightarrow \varphi[\mathtt{swap}(t)/x]$$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Dado un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle 1, 2; 1; 0\rangle$, con símbolos P, Q, f:

a. Exprese con una fórmula ψ que la interpretación del símbolo de función f es sobreyectiva. Recordemos que una función $h : A \rightarrow A$ es sobreyectiva cuando $A = \{h(a) : a \in A\}$.

b. Demuestre que $\forall w \forall z((P(w) \leftrightarrow P(z)) \leftrightarrow Q(w, z)) \models Q(x, y) \rightarrow Q(y, x)$

c. Dé una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \not\models \exists x(Q(z, x) \leftrightarrow \neg Q(f(z), x))$

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash \quad \neg(\exists x)(\neg P(x)) \wedge (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x)Q(x)$

b. $\vdash \quad (\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\exists z)(\neg P(z) \wedge \neg Q(z)) \to (\exists x)(\exists w)(\neg x =' w)$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_1$ de tipo de similaridad $\langle 1; 1; 1\rangle$. Considere además dos conjuntos arbitrarios de fórmulas Γ_1 y Γ_2, ambos incluidos en `SENT`. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifique sus respuestas.

a. $\perp \in Th(Mod(\emptyset))$

b. $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subseteq Th(\emptyset)$

c. Si $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ entonces $Mod(\Gamma_1) \neq Mod(\Gamma_2)$

d. Sea $\mathcal{L}_2$ un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle 1; 1; 2\rangle$; y por lo tanto, $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$. Sean $T_1 \subseteq \mathcal{L}_1$ tal que $T_1 = \mathtt{CONS}(\emptyset)$, y $T_2 \subseteq \mathcal{L}_2$ tal que $T_2 = \mathtt{CONS}(\{(\forall x) f_1(x) = \overline{c_2}\})$. Entonces T_2 es una extensión conservativa de T_1.