Segundo parcial de Lógica

Julio 2010

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (17 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0\rangle$ cuyo alfabeto cuenta con los símbolos de relación P y $='$, el símbolo de función f, las variables $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, los conectivos $\neg$ y $\rightarrow$, el cuantificador universal $\forall$, y los símbolos auxiliares) y (.

a. Enuncie el PIP para las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$.

b. Para cualquier fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ y variables x, y tales que x no aparece en φ ($x \notin V(\varphi)$), pruebe que $(\varphi[x/y])[y/x] = \varphi$.

c. Muestre que la condición sobre la variable x es necesaria para que se cumpla la propiedad anterior.

Ejercicio 2 (18 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle 1, 1; -; 0\rangle$, con símbolos de predicados$P$ y Q. Sean las fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (\exists x)(\exists y)\neg x{=}'y \\
\varphi_2 &= P(x) \vee Q(x) \\
\varphi_3 &= P(x) \rightarrow \neg Q(x) \\
\varphi_4 &= (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)
\end{aligned}$$

a. Determine si existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$. Justifique.

b. ¿Es cierto que para cualquier estructura $\mathcal{M}$ del tipo adecuado se cumple que si $\mathcal{M} \models \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi_1$? ¿ Se cumple el recíproco? Justifique.

c. Determine si existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi_3 \wedge \varphi_4$ y $\mathcal{M} \not\models \varphi_2$. Justifique.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash \quad ((\exists x)P(x) \wedge (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

b. $(\forall x)f(x, \overline{c_0}) =' x, (\forall x)f(\overline{c_0}, x) =' x \quad \vdash \quad (\forall y)((\forall x)f(x, y) =' x \rightarrow y =' \overline{c_0})$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas

Ejercicio 4 (10 puntos)

a. Considere dos conjuntos de sentencias Γ y Δ tales que $Mod(\Gamma) \subset Mod(\Delta)$. Demuestre que para cualquier fórmula $\varphi \in \Delta$, se cumple que $\Gamma \vdash \varphi$.

b. De dos conjuntos de sentencias Γ y Δ consistentes tales que $\Gamma \neq \Delta$, $V(\varphi) = \{x\}$ para cualquier sentencia $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$, y $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$. Justifique su respuesta.