Segundo parcial de Lógica

Julio 2009

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- Toda respuesta debe estar fundamentada. Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de estudiante, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (16 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle 1; 2; 1\rangle$, con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c_1.

Pregunta *. Defina inductivamente el conjunto $\texttt{TERM}_C$ de los términos cerrados de $\mathcal{L}$. (Recuerde que no se considera el lenguaje extendido). ♣

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, \mathbb{N}, +, 0\rangle$.

a. Indique si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Realice una demostración o proporcione un contraejemplo según corresponda.

   I. Si $t \in \texttt{TERM}$ entonces $\mathcal{M} \models P(t)$
   II. Si $t \in \texttt{TERM}_C$ entonces $\mathcal{M} \models P(t)$
   III. Si $t \in \texttt{TERM}_C$, $t' \in \texttt{TERM}_C$, y $\mathcal{M} \models t =' t'$, entonces $t = t'$.

b. Sea $\mathcal{L}_2$ el subconjunto de $\texttt{FORM}$ definido inductivamente como:

   1. Si $t_1 \in \texttt{TERM}_C$ entonces $P(t_1) \in \mathcal{L}_2$
   2. Si $t_1 \in \texttt{TERM}_C$ y $t_2 \in \texttt{TERM}_C$ entonces $t_1 =' t_2 \in \mathcal{L}_2$
   3. Si $\alpha \in \mathcal{L}_2$ y $\beta \in \mathcal{L}_2$ entonces $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{L}_2$

   Demostrar que todos los elementos de $\mathcal{L}_2$ son modelados por $\mathcal{M}$.

Ejercicio 2 (14 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle -; 1; 1\rangle$, con símbolo de función f y símbolo de constante c_1.

Pregunta *. Dé $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models f(x) =' c_1$. (No necesita justificar). ♣

Sea $\varphi := f(x) =' c_1 \wedge (\exists y)(f(y) =' x)$.

a. Encontrar $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \models \varphi$. Justifique la respuesta.

b. Demostrar que $\not\models \varphi$.

c. Determine si existe $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \models \neg\varphi$. Justifique la respuesta.

Ejercicio 3 (16 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0\rangle$, con símbolo de predicado P y símbolo de función f.

Pregunta *. Dé una derivación que muestre $\vdash f(x) =' f(x)$. ♣

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash (\forall x)(\forall y)x =' y \to \neg\exists x \exists y(P(x) \wedge \neg P(y))$

b. Sea φ una fórmula cualquiera, $\vdash (\forall x)((\forall y)(x =' y \to \neg f(x) =' f(y)) \to \varphi)$.

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (14 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0\rangle$, con símbolo de predicado P y símbolo de función f. Sea

$$\Gamma := \{(\forall x)(\forall y)(\neg x =' y \to \neg f(x) =' f(y))\}.$$

Pregunta *. Dé un elemento perteneciente a $Mod(\Gamma)$. (No necesita justificar). ♣

a. Dé un conjunto Δ tal que $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$ y $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$.

b. Pruebe que $\nvdash (\forall x)(\forall y)(\neg x =' y \to \neg f(x) =' f(y))$.

c. ¿$\texttt{CONS}(\Gamma)$ es consistente maximal? Justifique su respuesta.