Práctico 8
Deducción Natural e Identidad - Lógica de Predicados

Consideraciones generales:
En todas las derivaciones que se construyan, se debe explicitar:

- el nombre de las reglas aplicadas
- la regla asociada a cada cancelación de hipótesis
- cuando corresponda, el cumplimiento de las restricciones asociadas a las reglas.
- En los ejercicios 6, 9 y 12 se proponen ejercicios donde se describe una cierta realidad mediante oraciones en lenguaje natural. Se deberá *codificar* dichas oraciones en lógica de primer orden, definiendo un tipo de similaridad apropiado. Se deberán justificar ciertas conclusiones mediante derivaciones.

Ejercicio 1

Dada la siguiente derivación para $\vdash \exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$, donde $x \notin FV(\varphi)$:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\varphi] \quad [\varphi]}{\varphi} \qquad \dfrac{[\varphi]}{\exists x\varphi}}{\exists x\varphi \leftrightarrow \varphi}$$

Indique las reglas aplicadas en cada paso, justificando además a que aplicación de regla corresponde cada hipótesis cancelada

Ejercicio 2

Indique por qué las siguientes derivaciones no son correctas.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\exists x P(x,y)}{\exists x P(x,y)}\,E\forall \qquad [P(x,y)]_1}{P(x,y)}\,E\exists_1}{\forall y P(x,y)}\,I\forall}{\exists x\forall y P(x,y)}\,I\exists$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\exists x P(x,y)}{\exists x P(x,y)}\,E\forall \qquad \dfrac{[P(x,y)]_1}{\forall y P(x,y)}\,I\forall}{\forall y P(x,y)}\,E\exists_1}{\exists x\forall y P(x,y)}\,I\exists$$

Ejercicio 3

Sean φ, ψ, fórmulas de $FORM$ Construya derivaciones que demuestren las siguientes afirmaciones.

a. $\forall x(\varphi \to \psi) \vdash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
b. $\forall x\varphi \vdash \neg\forall x(\neg\varphi)$
c. $\forall x\varphi \vdash \forall z\varphi[z/x]$, donde z no ocurre en φ.
d. $\forall x\forall y\varphi \vdash \forall y\forall x\varphi$
e. $\forall x\forall y\varphi \vdash \forall x\varphi[x/y]$, donde $x \notin BV(\varphi)$
f. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$
g. $\exists x\varphi, \forall x(\varphi \to \psi) \vdash \exists x\psi$

Ejercicio 4

Sean φ, ψ fórmulas de $FORM$. Construya derivaciones para los siguientes teoremas del cálculo de predicados.

a. $\vdash \exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$, donde $x \notin FV(\varphi)$
b. $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$
c. $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \forall x\psi)$, donde $x \notin FV(\varphi)$
d. $\vdash \exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \wedge \psi$, donde $x \notin FV(\psi)$
e. $\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x(\neg\varphi)$
f. $\vdash \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x(\neg\varphi)$

Ejercicio 5

Sean φ, ψ fórmulas de $FORM$. Construya derivaciones para los siguientes teoremas del cálculo de predicados.

a. $\vdash \neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x(\neg\varphi)$
b. $\vdash \forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \vee \psi$, donde $x \notin FV(\psi)$
c. $\vdash \exists x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \to \psi)$, donde $x \notin FV(\psi)$
d. $\vdash \exists x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \exists x\psi)$, donde $x \notin FV(\varphi)$
e. $\vdash \exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$

Ejercicio 6

Considerando el ejercicio 2 del práctico 6:

a. Dada la siguiente definición para la relación de *hermanos*:

> Dos personas son hermanos si y sólo si son dos personas distintas que tienen la misma madre.

   I. Escriba la definición anterior como una fórmula de `FORM`.
   II. Escriba una derivación que permita concluir que la relación *hermanos* es irreflexiva y simétrica.

b. Considere las siguientes hipótesis:

(H_1) La relación ser hermano es simétrica
(H_2) Los hermanos de los estudiantes son también estudiantes
(H_3) Los hermanos de Juan estudian
(H_4) Juan no estudia

y la conclusión:

(C) Juan no tiene hermanos

Formalizar el razonamiento anterior mediante una derivación en `FORM`.

c. Considere las siguientes hipótesis:

(H_1) Toda persona es estudiante o tiene un hermano que lo es.
(H_2) Juan tiene sólo un hermano y este no estudia.

y la conclusión:

(C) Juan estudia.

Formalizar el razonamiento anterior mediante una derivación en `FORM`.

Ejercicio 7

Demuestre que:

a. $\vdash \forall z(z =' x \leftrightarrow z =' y) \to (x =' y)$
b. $\vdash \forall x \exists y(x =' y)$
c. $\vdash \forall x \forall y \forall z(\neg(x =' y) \to \neg(x =' z) \vee \neg(y =' z))$
d. $\overline{\forall} \varphi \in FORM$, si $y \notin V(\varphi)$, entonces $\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \forall y(x =' y \to \varphi[y/x]))$
e. $\overline{\forall} \varphi \in FORM$, si $y \notin V(\varphi)$, entonces $\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \exists y(x =' y \wedge \varphi[y/x]))$

Ejercicio 8

Construya derivaciones que demuestren las siguientes afirmaciones.

a. $\vdash \neg \exists x(\neg \exists y f(x) =' y)$
b. $\vdash \exists x \exists y(\neg f(x) =' f(y)) \to \exists x \exists y \neg x =' y$
c. $\forall x(P(x) \to \exists y(\neg x =' y)), \forall x(P(x) \to \forall y(f(x) =' y)), \forall x P(x) \vdash \bot$
d. $\vdash (\forall x)(\forall y)x =' y \to \neg(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y))$
e. Sea φ una fórmula cualquiera, $\vdash (\forall x)((\forall y)(x =' y \to \neg f(x) =' f(y)) \to \varphi)$

Ejercicio 9

Si una relación R binaria en un conjunto $\mathcal{C}$ cumple con

(H_1) R es simétrica.

(H_2) R es transitiva

(H_3) Para Todo elemento $a \in \mathcal{C}$, existe $b \in \mathcal{C}$ tal que $a\ R\ b$.

y la conclusión:

(C) R es reflexiva.

Formalizar el razonamiento anterior mediante una derivación en `FORM`.

Ejercicio 10

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 2; -; 0\rangle$ con un símbolo P de predicado binario.
Considere las siguientes fórmulas de dicho lenguaje:
$\sigma_1 \equiv \forall x P(x,x)$
$\sigma_2 \equiv \forall x \forall y (P(x,y) \to P(y,x))$
$\sigma_3 \equiv \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land P(y,z) \to P(x,z))$
$\sigma_4 \equiv \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land P(x,z) \to P(y,z))$

Demuestre que: $\sigma_1, \sigma_4 \vdash \sigma_2 \land \sigma_3$

Ejercicio 11

a. Demuestre $\vdash \forall x \exists y \neg P(x,y) \to \neg \forall x \forall y P(x,y)$.
b. Demuestre que $\nvdash \neg(\forall x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)\neg P(x,y)$

Ejercicio 12

Considere las siguientes oraciones:

(I) Toda persona que ingrese al país que no sea VIP es vigilada por algún agente.

(II) Algunos traficantes ingresaron al país y sólo fueron vigilados por otro traficante.

(III) Ningún traficante es VIP.

a. ¿Qué conclusión preocupante puede obtener de las frases anteriores?.
b. Represente las frases de arriba como fórmulas de `FORM`. Indique cuál es el tipo de similaridad considerado.
c. Represente la conclusión como una fórmula de `FORM`.
d. Escriba una derivación que compruebe la validez de la conclusión dada.